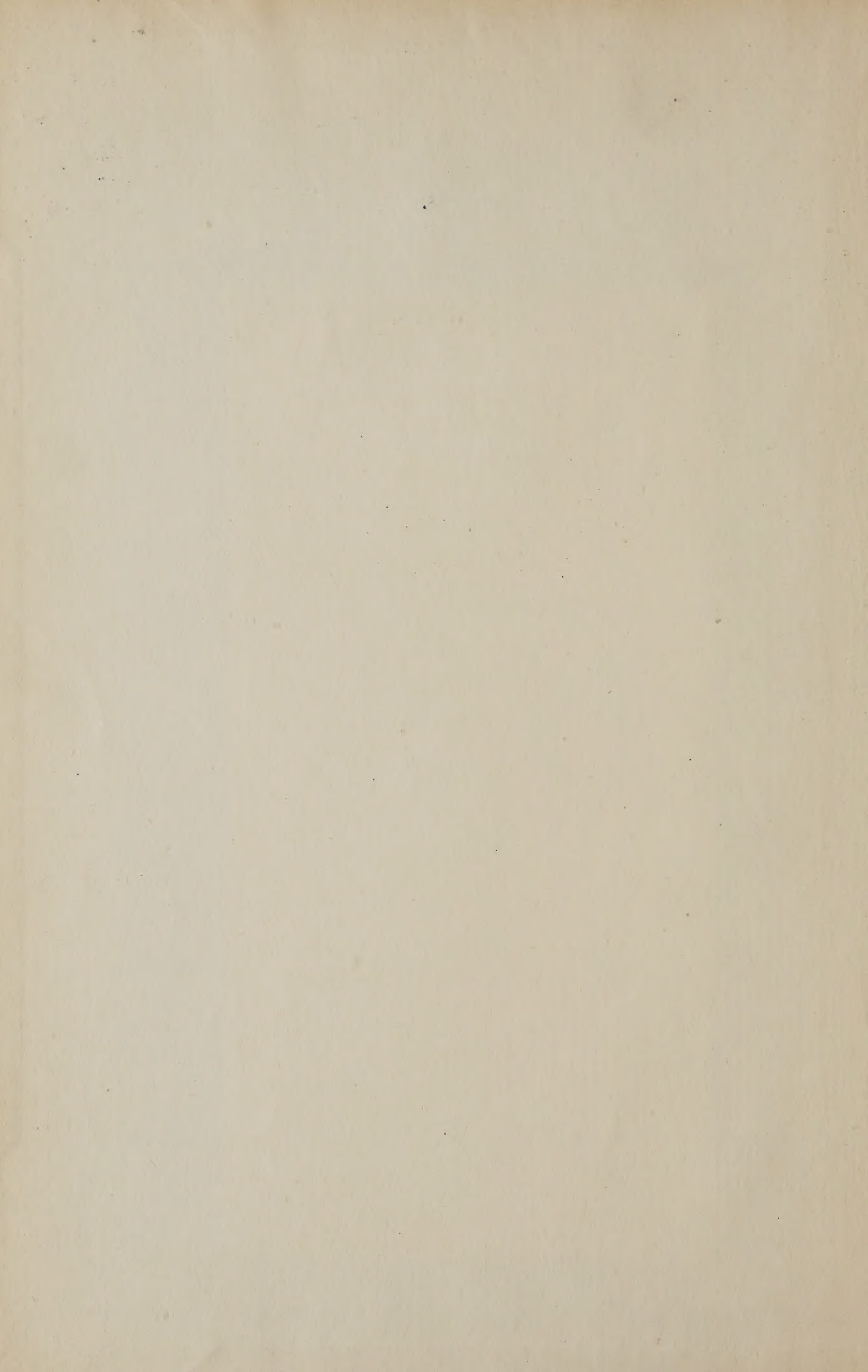


B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXXII, 1

SAMMLUNG VON AUFGABEN ZUR ANWENDUNG DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

VON

FRIEDRICH DINGELDEY
O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU DARMSTADT

ERSTER TEIL

AUFGABEN ZUR ANWENDUNG DER DIFFERENTIALRECHNUNG

MIT 99 FIGUREN IM TEXT

ZWEITE, ANASTATISCH
GEDRUCKTE AUFLAGE



VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1921

Vorwort zur ersten Auflage.

Die bisher erschienenen Sammlungen von Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung enthalten meistens Übungsbeispiele, die der Geometrie entnommen sind, während sie Beispiele aus der Physik nur in geringem Maße, solche aus der Technik fast gar nicht berücksichtigen. Die Bücher von A. Fuhrmann, die den „Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik“ gewidmet sind, behandeln allerdings zahlreiche naturwissenschaftliche und technische Aufgaben, aber die einzelnen Teile dieses Werkes haben weit mehr den Charakter eines Lehrbuches als den einer Aufgabensammlung. Übrigens ist das Buch unvollendet geblieben, denn die Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf Maschinenbau sind nicht erschienen. Auch das ausgezeichnete Werk von John Perry, „The calculus for engineers“, das durch die Herren Fricke und Süchting eine vortreffliche deutsche Bearbeitung gefunden hat, ist in erster Linie ein den Anwendungen der Infinitesimalrechnung in der Technik gewidmetes Lehrbuch. Ähnliches gilt von J. W. Mellor „Higher mathematics for students of chemistry and physics“, ein Buch, das übrigens, wie schon der Titel zeigt, fast nur die Naturwissenschaften berücksichtigt.

Es schien mir ein Buch zu fehlen, das nur Aufgabensammlung sein will und Beispiele enthält, die der Geometrie, den Naturwissenschaften und der Technik entnommen sind. Die vorliegende Schrift soll ein Versuch sein diesem Mangel abzuhelfen. Ich habe mich bei ihrer Ausarbeitung bemüht solche geometrische Beispiele zu bringen, die zumeist auch für den Physiker und Techniker von Interesse und Nutzen sein werden, während der Studierende der reinen Mathematik hoffentlich den physikalischen und technischen Beispielen Interesse entgegenbringen wird, zumal diese so gewählt sind, daß ihr Verständnis keine besonderen Vorkenntnisse erfordert; wo solche wünschenswert zu sein schienen, sind die nötigen Erläuterungen gegeben.

Das Buch enthält nicht nur Aufgaben sondern auch die zugehörigen Lösungen und bei den meisten Beispielen — bald mehr, bald

weniger ausführlich — die zu den Lösungen führenden Erläuterungen. Zu Anfang eines jeden Paragraphen findet man die Sätze und Regeln, die in ihm angewandt werden sollen; ihre Beweise sind nicht gegeben, denn das Buch will kein Lehrbuch sein. Ich habe erstrebt den Forderungen mathematischer Strenge möglichst gerecht zu werden; hierbei auf ferner liegende Theorien einzugehen schien mir den Zwecken des Buches nicht zu entsprechen. Manche der den Aufgaben beigefügten literarischen Bemerkungen sollen in dem Leser den Wunsch zum Studium der zitierten Abhandlungen erwecken.

Anregungen zu Verbesserungen oder zur Aufnahme weiterer geeigneter Aufgaben werde ich dankbar entgegennehmen.

Zum Schluß erfülle ich die angenehme Pflicht meinem verehrten Freund und Kollegen, Herrn Professor Dr. G. Scheffers besonderen Dank auszusprechen. Mit größter Liebenswürdigkeit und Sorgfalt unterzog er sich der Mühe die erste Korrektur des Druckes zu lesen; zahlreiche Verbesserungen verdanke ich ihm.

Darmstadt, im September 1909.

F. Dingeldey.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Nachdem im Herbst des vergangenen Jahres ein anastatischer Nachdruck des zweiten Teiles dieser Aufgabensammlung erschienen war, ist nun auch der erste Teil vergriffen und eine neue Ausgabe notwendig geworden. Mit Rücksicht auf die weit größere Verteuerung, die ein Neusatz des Buches herbeigeführt hätte, konnte sich die Verlagsbuchhandlung auch jetzt nur zu einem anastatischen Nachdruck entschließen, bei dem sich aber die in der ersten Ausgabe vorhandenen Druckfehler beseitigen ließen. Einige von ihnen teilte mir im Frühjahr 1917 Herr Wilhelm Detig mit, damals Regierungsbauführer und als verwundeter Kriegsteilnehmer in einem Lazarett zu Breslau befindlich. Ich sage ihm auch an dieser Stelle für seine freundliche Aufmerksamkeit besten Dank.

Darmstadt, im Juli 1921.

F. Dingeldey.

Inhalt.[1])

1) Ein ausführliches Sachregister befindet sich am Schluß des Bandes.



§ 1.

Einige allgemeine Regeln. Differentiation der Potenz.

1. Sind in endlicher Anzahl n irgend welche Funktionen u_1, $u_2, \ldots u_n$ der unabhängigen Veränderlichen x gegeben und werden diese Funktionen der Reihe nach mit beliebigen positiven oder negativen Konstanten (Koeffizienten) $a_1, a_2, \ldots a_n$ multipliziert und alsdann addiert, so gilt für die Differentiation des so entstehenden Aggregates die Regel: Die *Summe*

$$y = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$$

hat die Ableitung (den Differentialquotienten)[1]:

$$y' = \frac{dy}{dx} = a_1 u_1' + a_2 u_2' + \cdots + a_n u_n'.$$

Insbesondere hat also $y = af(x)$ die Ableitung $y' = af'(x)$.

2. Das *Produkt* $y = uv$ zweier Funktionen u und v hat die Ableitung:

$$y' = uv' + vu'.$$

3. Der *Quotient* $y = \frac{u}{v}$ hat die Ableitung

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

4. Ist y eine Funktion von u, etwa $y = \varphi(u)$, während u vermöge $u = f(x)$ von x abhängt, so ist y auch eine Funktion $F(x)$ von x, durch Vermittelung von u. Sie hat die Ableitung $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ oder anders geschrieben:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(u) \cdot f'(x).$$

---

1) Im folgenden wird die Ableitung einer Funktion durch einen der abhängigen Veränderlichen oder dem Funktionszeichen beigefügten Akzent bezeichnet, und zwar insbesondere dann, wenn nur eine unabhängige Veränderliche auftritt und somit Mehrdeutigkeit ausgeschlossen ist. Eine solche würde aber z. B. nicht ausgeschlossen sein bei der unter Nr. 4 betrachteten Abhängigkeit; es könnte dort y' sowohl $\varphi'(u) = \frac{d\,\varphi(u)}{dx}$ als auch $F'(x) = \frac{d\,F(x)}{dx}$ bezeichnen. Zwar würde sich diese Mehrdeutigkeit durch eine besondere Verabredung über die Bedeutung von y' vermeiden lassen, doch ziehen wir in allen mehrdeutigen Fällen die den Buchstaben d benutzende oder eine solche Schreibweise wie $\varphi'(u)$, $F'(x)$ vor und können dann auf eine besondere Verabredung verzichten.

5. Erweiterung von Regel 4 auf mehrere, z. B. drei die Abhängigkeit der Größe y von x derart vermittelnde Veränderliche u, v, w, daß $y = \varphi(u)$, $u = \chi(v)$, $v = \psi(w)$, $w = f(x)$, also schließlich $y = F(x)$ ist; alsdann hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx} = \varphi'(u) \cdot \chi'(v) \cdot \psi'(w) \cdot f'(x).$$

6. Die Ableitung der *Potenz* $y = x^n$, deren Exponent n eine beliebige konstante Zahl bedeutet, ist $y' = nx^{n-1}$.

6a. Die Ableitung einer Konstante a ist Null, $\frac{da}{dx} = 0$.

7. Die für einen Punkt P der Kurve $y = f(x)$ gebildete Ableitung y' ist bei rechtwinkligen Koordinaten gleich der *trigonometrischen Tangente des Winkels α, den die im Punkte P gezogene geometrische Tangente der Kurve mit der positiven Richtung der x-Achse bildet.* Man kann $\operatorname{tg}\alpha$ als *Steigung* der in P gezogenen Tangente bezeichnen; häufig wird diese Größe auch *Richtungskonstante* genannt.

Hinsichtlich der Koordinatenachsen werde bemerkt, daß im folgenden fast ausschließlich rechtwinklige Koordinaten zugrunde gelegt sind, und zwar sollen die positiven Richtungen der beiden Achsen so zueinander gelegen sein, daß man die in positiver Richtung gezogene x-Achse in dem der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne drehen muß, um sie auf kürzestem Wege in die in positiver Richtung gezogene y-Achse überzuführen. Die x-Achse wird gewöhnlich in horizontaler Lage angenommen.

Wird eine Kurve im Sinne der positiv wachsenden x durchlaufen, so nehmen die Ordinaten y zu oder die Kurve steigt, falls y' positiv ist, die Kurve fällt bei negativem Werte von y'. Umgekehrt: Je nachdem die Kurve beim Durchlaufen im Sinne der positiv wachsenden x steigt oder fällt, ist y' positiv oder negativ.

Ähnliches gilt, wenn die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten, $r = f(\vartheta)$, vorliegt. Wird die Kurve im Sinne der positiv wachsenden Polarwinkel (Amplituden) ϑ durchlaufen, so ändern sich die Radienvektoren in positivem oder negativem Sinne, je nachdem $r' = f'(\vartheta)$ positiv oder negativ ist. Es wird hierbei für das Folgende die Verabredung getroffen, daß die Polarwinkel von der Achse der Polarkoordinaten aus in dem der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne wachsen.

Beispiele.

1. $y = x^3$, $\qquad y' = 3x^2$.

2. $y = \frac{x^2}{2}$, $\qquad y' = x$.

3. $y = x$, $\qquad y' = 1$.

4. $y = ax^5$, $y' = 5ax^4$.

5. $y = ax^2 + 2bx + c$, $y' = 2(ax + b)$.

6. Welcher Punkt der Parabel $y = x^2$ hat eine Tangente, die mit der x-Achse den Winkel $\alpha = 45^0$ bildet und bei welchem Punkt ist $\alpha = 60^0$? Mit anderen Worten: An welchen Stellen der Parabel $y = x^2$ ist die Steigung der Tangente gleich 1 bzw. gleich $+\sqrt{3}$?

$$x = \tfrac{1}{2}, \quad y = \tfrac{1}{4} \quad \text{bzw.} \quad x = +\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad y = \tfrac{3}{4}.$$

7. Die gleiche Aufgabe für die kubische Parabel $y = \frac{x^3}{8}$ und $\alpha = 45^0$.

$$x = \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{6}, \quad y = \pm \tfrac{2}{9}\sqrt{6},$$

wobei die beiden oberen oder auch die beiden unteren Vorzeichen zusammengehören.

8. Die gleiche Aufgabe für die Kurve $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{3}$ und $\alpha = 135^0$.

$$x = 1, \quad y = -\tfrac{1}{3} \quad \text{(vgl. Fig. 1).}$$

9. In welchen Punkten dieser Kurve ist die Tangente zur x-Achse parallel?

$$x = 0, \quad y = \tfrac{1}{3} \quad \text{und} \quad x = 2, \quad y = -1.$$

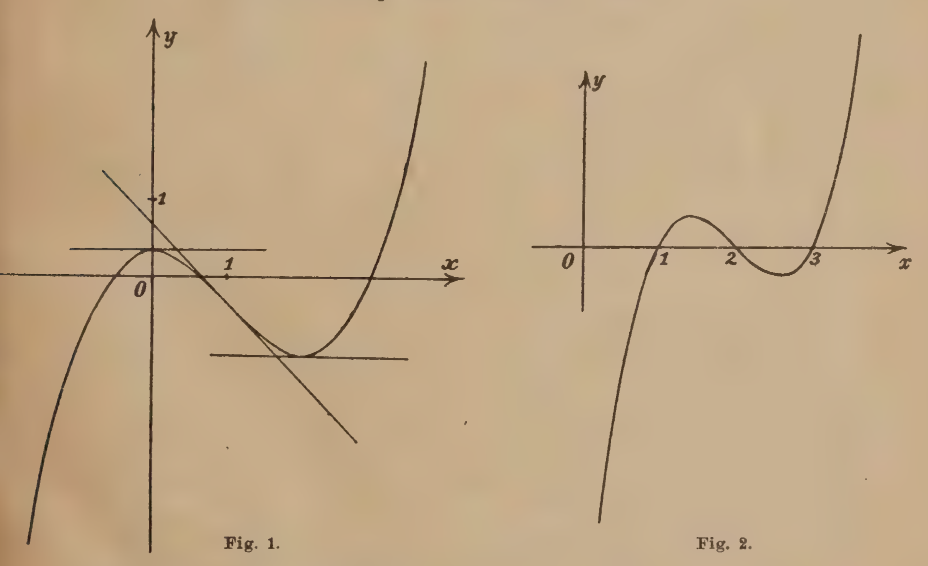


Fig. 1. Fig. 2.

10. Unter welchen Winkeln schneidet die Kurve

$$y = (x-1)(x-2)(x-3) \quad \text{oder} \quad y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

die x-Achse?

Für den Punkt $x = 2$ ist $\alpha = 135^0$, für die Punkte $x = 1$ und $x = 3$ ist $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\alpha = 63^0 26' 6''$. Vgl. Fig. 2.

11. Welche Bedeutung hat die einem Punkt P der Kurve $y=f(x)$ zugehörige Ableitung y' bei *schiefwinkligen Koordinaten* mit dem Achsenwinkel ω und wie drückt sich dann $\operatorname{tg}\alpha$ durch y' und ω aus, falls unter α der von der Tangente des Punktes P mit der positiven Richtung der x-Achse gebildete Winkel verstanden wird?

$$y' = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}, \quad \text{woraus} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y'\sin\omega}{1+y'\cos\omega} \quad \text{folgt.}$$

Weitere Beispiele zur Differentiation.

12. $y = \frac{a}{x}$, $\qquad y' = -\frac{a}{x^2}$.

13. $y = \frac{a}{x^n}$, $\qquad y' = -\frac{an}{x^{n+1}}$.

14. $y = \frac{a}{f(x)}$, $\qquad y' = -\frac{a}{f^2(x)}\cdot f'(x)$.

15. $y = \sqrt{x}$, $\qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

16. Legt man durch den Brennpunkt $x=\frac{1}{4}p$, $y=0$ der Parabel $y^2=px$ rechtwinklig zur Achse eine Sehne (konstruiert man also den sogenannten Parameter der Kurve), so bilden die in den Endpunkten dieser Sehne gezogenen Kurventangenten mit der Achse der Parabel Winkel von 45^0 bzw. 135^0.

$y=\sqrt{px}$ ergibt $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$; die Koordinaten der Endpunkte der Sehne sind $x=\frac{p}{4}$, $y=\pm\frac{p}{2}$.

Zu differenzieren:

17. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $\qquad y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

18. $y=x^2\sqrt{x}$, $\qquad y'=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$.

19. $y=\frac{x^4}{\sqrt[5]{x^2}}$, $\qquad y'=\frac{18}{5}x^2\sqrt[5]{x^3}$.

20. $y=ax^2+b\sqrt{x}+c\sqrt{x^3}+\frac{d}{\sqrt{x}}$, $\qquad y'=2ax+\frac{b}{2\sqrt{x}}+\frac{3c}{2}\sqrt{x}-\frac{d}{2x\sqrt{x}}$.

21. $y=\sqrt[n]{x^m}$, $\qquad y'=\frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}=\frac{m\sqrt[n]{x^m}}{nx}$.

22. $y=x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$, $\qquad y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

23. $y=x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}$, $\qquad y'=\frac{13}{9}\sqrt[9]{x^4}$.

24. $y = \sqrt{ax + b}$, $\qquad y' = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$.

25. $y = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$, $\qquad y' = \frac{ax + b}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$.

26. $y = \sqrt[n]{ax^2 + 2bx + c}$, $\qquad y' = \frac{2(ax + b)\sqrt[n]{ax^2 + 2bx + c}}{n(ax^2 + 2bx + c)}$.

27. $y = (ax + b)^5$, $\qquad y' = 5a(ax + b)^4$.

28. $y = (5x^2 - 8x + 3)^n$, $\qquad y' = 2n(5x - 4)(5x^2 - 8x + 3)^{n-1}$

29. $y = \frac{3}{(x^2 - 2)^2}$, $\qquad y' = \frac{-12x}{(x^2 - 2)^3}$.

30. Man bilde $\frac{dp}{dv}$, wenn p als Funktion von v durch die Gleichung $pv^\gamma - c = 0$ definiert ist.

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{\gamma c}{v^{\gamma + 1}}.$$

31. $y = x^2(3x - 5)^4$, $\qquad y' = 2x(9x - 5)(3x - 5)^3$.

32. $y = (3x^2 - 5x + 7)(4x + 3)^3$, $\qquad y' = (4x + 3)^2(60x^2 - 62x + 69)$.

33. $y = (px + q)\sqrt{ax + b}$, $\qquad y' = \frac{3apx + aq + 2bp}{2\sqrt{ax + b}}$.

34. $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, $\qquad y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

Aus welchem inneren Grunde verschwindet diese Ableitung, falls $ad - bc = 0$ ist?

35. $y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$, $\qquad y' = \frac{2\{(a\beta - b\alpha)x^2 + (a\gamma - c\alpha)x + b\gamma - c\beta\}}{(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^2}$.

36. $y = \frac{ax + b}{\sqrt{cx + d}}$, $\qquad y' = \frac{acx + 2ad - bc}{2(cx + d)\sqrt{cx + d}}$.

37. Unter der Annahme, daß die Formel für die Ableitung einer Potenz x^n nur für einen positiven Zahlenwert n als gültig erwiesen wäre, beweise man ihre Gültigkeit auch bei negativem n, also für $n = -m$, wo m eine positive Zahl bedeutet.

Aus $y = x^{-m}$ folgt $yx^m - 1 = 0$ und durch Differentiation

$$ymx^{m-1} + y'x^m = 0, \quad y' = -\frac{m}{x^{m+1}}.$$

38. Aus der Formel für die Ableitung des Produktes zweier Funktionen bilde man die Formel für die Ableitung des Quotienten $y = u : v$ zweier Funktionen u und v.

Aus $y = u : v$ folgt $vy - u = 0$; die Gleichung ist nach x zu differenzieren.

39. Man zeige, daß die in den drei Punkten $x = 0$, $y = 0$; $x = +\sqrt{3}$, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $x = -\sqrt{3}$, $y = +\frac{1}{2}\sqrt{3}$ gezogenen Tangenten

der Kurve $y = \frac{x}{1-x^2}$ einander parallel sind, indem sie mit der x-Achse einen Winkel von 45^0 bilden (Fig. 3).

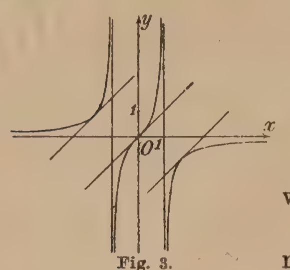


Fig. 3.

$$y' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

40. In welchen Punkten der Kurve

$$y = \frac{x-6}{(x+2)(x-4)}$$

verläuft die Tangente zur x-Achse parallel?

Es gibt zwei solche Punkte, ihre Koordinaten sind $x = 10$, $y = \frac{1}{18}$ und $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$.

41. Aus der bekannten Formel $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, wo $x \neq 1$ sei, leite man durch Differentiation eine neue Formel ab.

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^n}{x-1} - \frac{x^n-1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

42. Die soeben abgeleitete Formel multipliziere man mit x und differenziere sie alsdann nach x. Es ergibt sich für $x \neq 1$:

$$1 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} = \frac{x^n\{n^2x^2-(2n^2+2n-1)x+(n+1)^2\}-x-1}{(x-1)^3}.$$

Der Fall $x = 1$, der eine Formel für die Summe der Quadrate der n ersten ganzen Zahlen liefert, wird in § 12, Aufg. 16 erledigt.

43. Eine gerade Funktion von x ist bekanntlich eine solche, die der Gleichung $\varphi(x) = \varphi(-x)$ genügt, während für eine ungerade Funktion die Gleichung $\psi(x) = -\psi(-x)$ besteht. Gerade Funktionen sind z. B. $y = ax^4 + bx^2$, $y = \cos x$, ungerade Funktionen z. B. $y = ax^3 + bx$, $y = \sin x$. Man zeige, daß die Ableitung einer geraden Funktion eine ungerade Funktion, die Ableitung einer ungeraden eine gerade Funktion ist.

Folgt leicht aus den vorstehenden Gleichungen für $\varphi(x)$ und $\psi(x)$.

§ 2.

Differentiation der Exponentialfunktion und des Logarithmus.

1. Die Exponentialfunktion $y = a^x$, in der a eine positive Zahl bedeutet, hat die Ableitung $y' = \frac{a^x\,{}^b\!\log a}{{}^b\!\log e} = a^x \cdot \ln a$. Hier bezeichnet ${}^b\!\log a$ den Logarithmus von a für die Basis b, $\ln a$ den natürlichen Logarithmus von a, dem bekanntlich die Basis $e = 2{,}71828..$ zukommt.[1]) Insbesondere wird y' für $y = e^x$ ebenfalls gleich e^x.

1) Unter $\log x$ wird im folgenden stets der zur Basis 10 gehörige, also der

2. Die Funktion $y = {}^b\log x$ hat zur Ableitung $y' = \frac{1}{x}\,{}^b\log e$; insbesondere hat $y = \ln x$ die Ableitung $y' = \frac{1}{x}\cdot$

3. Wenn sich bei einer Funktion $y = f(x)$ die Ableitung von $\ln f(x)$ leichter bilden läßt als die Ableitung y' der Funktion, so erhält man y' am besten mit Hilfe der sogenannten *logarithmischen Differentiation.* Wenn z. B.

$$y = \frac{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta}{(x-c)^\gamma (x-d)^\delta}$$

gegeben ist, bildet man zunächst

$$\ln y = \alpha \ln (x-a) + \beta \ln (x-b) - \gamma \ln (x-c) - \delta \ln (x-d);$$

alsdann wird

$$\frac{1}{y}\,y' = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} - \frac{\gamma}{x-c} - \frac{\delta}{x-d},$$

woraus sich y' sofort nach Multiplikation mit y ergibt.

Beispiele.

1. $y = a^{5x}$, $\qquad y' = 5a^{5x}\cdot \ln a.$
2. $y = x^2 e^x$, $\qquad y' = xe^x(x+2).$
3. $y = x^7 e^x$, $\qquad y' = x^6 e^x(x+7).$
4. $y = e^{x^3}$, $\qquad y' = 3x^2 e^{x^3}.$
5. $y = e^{ax^2+2bx+c}$, $\qquad y' = 2(ax+b)e^{ax^2+2bx+c}.$
6. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathfrak{Cof}\, x$, $\qquad y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathfrak{Sin}\, x.$

Die Funktionen $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ sind der hyperbolische Cosinus bzw. der hyperbolische Sinus von x. Sie werden gewöhnlich durch $\mathfrak{Cof}\, x$ bzw. $\mathfrak{Sin}\, x$ bezeichnet; die Bezeichnungsweise $C(x)$ und $S(x)$, die der Verfasser in seinen Vorträgen anwendet, dürfte zweckmäßiger sein, da z. B. $C(x)$ eine leichtere Ausdrucksweise (C von x) ist als die schwerfällige Wortfolge hyperbolischer Kosinus von x. Diese hyperbolischen Funktionen genügen der Gleichung $\mathfrak{Cof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1$. Wie die trigonometrischen Funktionen $\cos t$ und $\sin t$ auf Grund der Beziehung $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ die einfache Parameterdarstellung $x = a \cos t,\ y = b \sin t$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ liefern, so geben die Gleichungen $x = \pm\, a\, \mathfrak{Cof}\, t,\ y = b\, \mathfrak{Sin}\, t$ die Parameterdarstellung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Diese Tatsache war gerade der Grund zur Bezeichnungsweise „hyperbolische Funktionen“. Wie Beispiel 6

---

gewöhnliche Logarithmus verstanden, während $\ln x$ den natürlichen Logarithmus bedeuten soll.

zeigt, ist $\frac{d \operatorname{Cos} x}{dx} = \operatorname{Sin} x$; ebenso hat man $\frac{d \operatorname{Sin} x}{dx} = \operatorname{Cos} x$. Vgl. auch Aufg. 6 und 7, in § 13.

7. $y = \frac{e^x - a}{e^x + a}$, $\quad y' = \frac{2 a e^x}{(e^x + a)^2}$.

8. $y = a^x \cdot x^a$, $\quad y' = a^x \cdot x^{a-1}(x \ln a + a)$.

9. $y = a^{x^n}$, $\quad y' = n x^{n-1} \cdot a^{x^n} \cdot \ln a$.

10. $y = (a^x)^n$, $\quad y' = n a^{nx} \cdot \ln a$.

11. $y = a^{f(x)}$, $\quad y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$.

12. $y = \ln(ax + b)$, $\quad y' = \frac{a}{ax + b}$.

13. $y = \ln x^n$, $\quad y' = \frac{n}{x}$.

14. $y = (\ln x)^n$, $\quad y' = \frac{n}{x} (\ln x)^{n-1}$.

15. $y = x \ln x$, $\quad y' = 1 + \ln x$.

16. $y = \frac{\ln x}{x}$, $\quad y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

17. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$, $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$.

18. $y = \ln(\ln x)$, $\quad y' = \frac{1}{x \ln x}$.

19. $y = \ln \sqrt[n]{\frac{x - a}{x + a}} = \frac{1}{n}\left(\ln(x - a) - \ln(x + a)\right)$, $\quad y' = \frac{2a}{n(x^2 - a^2)}$.

20. Wie groß ist die Steigung der Kurve $y = a^x$ in ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse? (Fig. 4)

$$\operatorname{tg} \alpha = \ln a; \quad \text{für } a = e \text{ wird } \operatorname{tg} \alpha = 1.$$

21. Unter welchem Winkel wird die x-Achse von der Kurve $y = {}^b\log x$ geschnitten? $\operatorname{tg} \alpha = {}^b\log e$;

für $b = 10$ wird $\alpha = 23^0 28' 29''$,
für $b = e$ wird $\alpha = 45^0$ (vgl. Fig. 5).

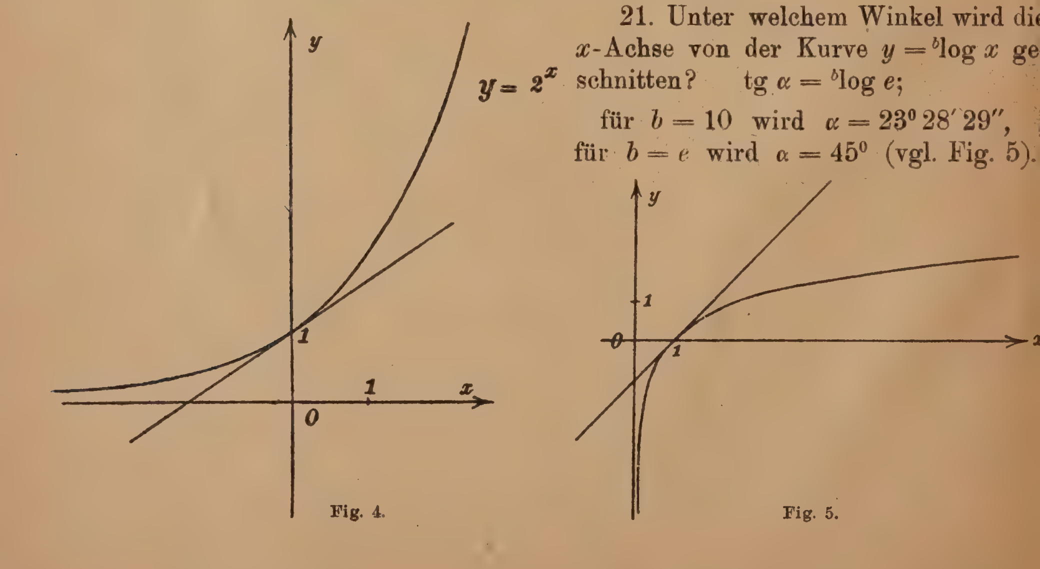


Fig. 4.

Fig. 5.

Beispiele zur logarithmischen Differentiation.

22. $y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, also $\ln y = \frac{1}{2}\ln(ax+b) - \frac{1}{2}\ln(cx+d)$,

$$y' = \frac{ad-bc}{2(ax+b)(cx+d)}\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

23. $y = x^x$, also $\ln y = x \ln x$, $\quad y' = x^x(1+\ln x)$.

24. $y = \sqrt[x]{x}$, also $\ln y = \frac{1}{x}\ln x$, $\quad y' = \frac{\sqrt[x]{x}\,(1-\ln x)}{x^2}$.

25. $y = x^{\sqrt{x}}$, $\quad y' = \frac{x^{\sqrt{x}}(2+\ln x)}{2\sqrt{x}}$.

26. $y = u^v$, wo $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $\quad y' = u^v\left(\frac{v}{u}u' + v'\ln u\right)$.

27. Man bilde mit Hilfe der logarithmischen Differentiation die Formel für die Ableitung des Produktes einer beliebigen endlichen Anzahl von Funktionen $u, v, w, \ldots$ der Veränderlichen x.

$$y = uvw\ldots \qquad y' = uvw\ldots\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \cdots\right).$$

§ 3.

Differentiation der trigonometrischen und der zyklometrischen Funktionen.

1. Es ist $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$, $\qquad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$,

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \frac{d\cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{d\,\mathrm{arc\,cot}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2. Bei $\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ muß die Quadratwurzel positiv oder negativ sein, je nachdem $\arcsin x$ einem der Intervalle von $\frac{4k-1}{2}\pi$ bis $\frac{4k+1}{2}\pi$ angehört oder einem der Intervalle von $\frac{4k+1}{2}\pi$ bis $\frac{4k+3}{2}\pi$, wo k stets eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, insbesondere auch die Null, bezeichnet.

Bei $\frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ hat die Quadratwurzel im Nenner das

Plus- oder Minuszeichen zu erhalten, je nachdem der Bogen $\operatorname{arc} \cos x$ einem der Intervalle von $2k\pi$ bis $(2k+1)\pi$ angehört oder einem der Intervalle von $(2k-1)\pi$ bis $2k\pi$, wo k stets eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, insbesondere auch die Null, bezeichnet.

Beispiele.

1. Wie groß ist die Steigung der Kurve $y = \sin x$ für $x = 0$, $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$? (Fig. 6).

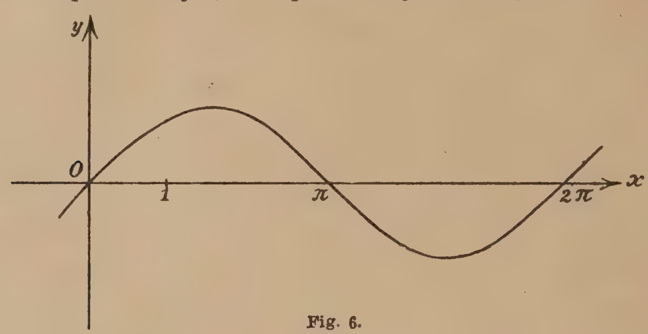


Fig. 6.

Man findet der Reihe nach die Werte $1, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}$.

2. Die Gleichung $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ nach α zu differenzieren.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

3. $\quad y = \sin 2x, \qquad y' = 2 \cos 2x.$

4. Ist die Intensität J eines Wechselstromes in ihrer Abhängigkeit von der Zeit t durch $J = J_0 \sin \omega t$ dargestellt, wo J_0 die maximale Stromstärke, $\frac{2\pi}{\omega}$ die Dauer einer Periode bedeutet, und befindet sich in dem Stromkreis eine Spule mit Selbstinduktion, so wird in der Spule eine elektromotorische Gegenkraft induziert, deren Betrag durch $L\frac{dJ}{dt}$ dargestellt ist, wobei L den Koeffizienten der Selbstinduktion bezeichnet und dJ die Änderung der Stromstärke während des Zeitelements dt bedeutet. Man bilde den Ausdruck $L\frac{dJ}{dt}$.

$$L\frac{dJ}{dt} = L\omega J_0 \cos \omega t = L\omega J_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

5. $\quad y = \frac{1}{\cos x}, \qquad y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$

6. $\quad y = \sin^2 x, \qquad y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$

7. $\quad y = \sin(x^2), \qquad y' = 2x \cos(x^2).$

8. $\quad y = x^2 \cos x, \qquad y' = 2x \cos x - x^2 \sin x.$

9. $y = \operatorname{tg} nx$, $\quad y' = \frac{n}{\cos^2 nx}$.

10. $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$, $\quad y' = \frac{1}{\cos^4 x}$.

11. $y = e^{ax} \cos bx$, $\quad y' = e^{ax}(a \cos bx - b \sin bx)$.

12. $y = \ln \sin x$, $\quad y' = \cot x$.

13. $y = \ln \cos x$, $\quad y' = -\operatorname{tg} x$.

14. $y = \ln \operatorname{tg} x$, $\quad y' = \frac{2}{\sin 2x}$.

15. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $\quad y' = \frac{1}{\cos x}$.

16. $y = \frac{a - b \cos x}{a + b \cos x}$, $\quad y' = \frac{2ab \sin x}{(a + b \cos x)^2}$.

17. $y = x^{\sin x}$, $\quad y' = x^{\sin x}\left\{\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x\right\}$

18. $y = x^{\operatorname{tg} x}$, $\quad y' = x^{\operatorname{tg} x}\left\{\frac{\operatorname{tg} x}{x} + \frac{\ln x}{\cos^2 x}\right\}$.

19. $y = \operatorname{arc} \sin 5x$, $\quad y' = \frac{5}{\sqrt{1 - (5x)^2}}$.

20. $y = \operatorname{arc} \cos (x^n)$, $\quad y' = \frac{-nx^{n-1}}{\sqrt{1 - x^{2n}}}$.

21. $y = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2$, $\quad y' = \frac{2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1 + x^2}$.

22. $y = \frac{a \sin x + b \cos x}{a \sin x - b \cos x}$, $\quad y' = \frac{-2ab}{(a \sin x - b \cos x)^2}$.

23. Aus welchem inneren Grunde sind die Ableitungen von $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ und $\operatorname{arc} \cot x$ einander entgegengesetzt gleich?

Die Summe $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \cot x$ ist stets konstant, nämlich gleich einem ungeraden ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$.

24. Aus welchem inneren Grunde sind die absoluten Werte der Ableitungen von $y = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ und von $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ einander gleich?

Aus $y = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ folgt $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, d. h. $\operatorname{tg} y = \pm x$ und $y = \pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

25. Ein Lichtstrahl, der aus einem Medium in ein anderes übergeht, wird bekanntlich nach dem Brechungsgesetz von Snellius so abgelenkt, daß der gebrochene Strahl mit dem einfallenden und dem Einfallslot in derselben Ebene liegt. Ferner stehen nach diesem Gesetz die Winkel β und ε, die die genannten Strahlen mit dem Einfallslot bilden, in der Beziehung $\sin \varepsilon = n \sin \beta$, wo n den von den beiden Medien abhängigen und für Strahlen von einer bestimmten

Wellenlänge gültigen Brechungsindex bezeichnet. Aus dieser Beziehung leite man nun die Gleichung ab:

$$n\frac{d\beta}{d\varepsilon} = \sqrt{1-(n^2-1)\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Zunächst wird $\cos\varepsilon = n\cos\beta\cdot\frac{d\beta}{d\varepsilon}$, daher $n\frac{d\beta}{d\varepsilon} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\beta} = \sqrt{\frac{1-n^2\sin^2\beta}{\cos^2\beta}}$ $= \sqrt{1-(n^2-1)\operatorname{tg}^2\beta}$.

26. Aus der Formel

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin(n-1)\alpha+\sin n\alpha = \frac{\sin\alpha+\sin n\alpha-\sin(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$$

leite man durch Differentiation nach α eine neue Formel ab.

Man erhält $\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cdots+(n-1)\cos(n-1)\alpha+n\cos n\alpha$

$$= \frac{(n+1)\cos n\alpha-n\cos(n+1)\alpha-1}{2(1-\cos\alpha)}.$$

27. Ebenso folgt aus

$$1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos(n-1)\alpha+\cos n\alpha = \frac{1}{2}+\frac{\cos n\alpha-\cos(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$$

die Gleichung:

$$\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\cdots+(n-1)\sin(n-1)\alpha+n\sin n\alpha$$
$$= \frac{(n+1)\sin n\alpha-n\sin(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)}.$$

Was übrigens die Ableitung der in Aufg. 26 und 27 zur Differentiation vorgelegten Formeln betrifft, so setze man in der Gleichung $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\beta+\alpha)+\sin(\beta-\alpha)$ an Stelle von β der Reihe nach $\alpha, 2\alpha, \ldots (n-1)\alpha, n\alpha$. Hierdurch ergeben sich die Gleichungen:

$$2\cos\alpha\sin\alpha = \sin 2\alpha,$$
$$2\cos\alpha\sin 2\alpha = \sin 3\alpha+\sin\alpha,$$
$$2\cos\alpha\sin 3\alpha = \sin 4\alpha+\sin 2\alpha,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2\cos\alpha\sin(n-1)\alpha = \sin n\alpha+\sin(n-2)\alpha,$$
$$2\cos\alpha\sin n\alpha = \sin(n+1)\alpha+\sin(n-1)\alpha,$$

nach deren Addition leicht die in Aufg. 26 zur Differentiation vorgelegte Formel folgt. Ihre rechte Seite kann auch in die Gestalt $\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ gebracht werden. Setzt man in

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\beta+\alpha)+\cos(\beta-\alpha)$$

an Stelle von β der Reihe nach $\alpha, 2\alpha, \ldots (n-1)\alpha, n\alpha$ und bildet die Summe der so entstehenden Gleichungen, so folgt leicht die in

Aufg. 27 zur Differentiation vorgelegte Formel, deren rechte Seite sich auch in die Gestalt $\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cdot\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ bringen läßt.

28. Nach Euler[1]) ist:

$$1+\binom{n}{1}\cos\alpha+\binom{n}{2}\cos 2\alpha+\cdots+\binom{n}{h}\cos h\alpha+\cdots+\binom{n}{1}\cos(n-1)\alpha$$
$$+\cos n\alpha=2^n\cdot\cos^n\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{n\alpha}{2}.$$

Hieraus durch Differentiation eine neue Formel abzuleiten. Man findet:

$$\binom{n}{1}\sin\alpha+2\binom{n}{2}\sin 2\alpha+\cdots+h\binom{n}{h}\sin h\alpha+\cdots+(n-1)\binom{n}{1}\sin(n-1)\alpha$$
$$+n\sin n\alpha=n\cdot 2^{n-1}\cdot\cos^{n-1}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}\alpha.$$

29. Ebenso bilde man aus

$$\binom{n}{1}\sin\alpha+\binom{n}{2}\sin 2\alpha+\cdots+\binom{n}{h}\sin h\alpha+\cdots+\binom{n}{1}\sin(n-1)\alpha+\sin n\alpha$$
$$=2^n\cdot\cos^n\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n\alpha}{2}\ ^{1)}$$

durch Differentiation eine neue Formel.

Man erhält:

$$\binom{n}{1}\cos\alpha+2\binom{n}{2}\cos 2\alpha+\cdots+h\binom{n}{h}\cos h\alpha+\cdots+(n-1)\binom{n}{1}\cos(n-1)\alpha$$
$$+n\cos n\alpha=n\cdot 2^{n-1}\cdot\cos^{n-1}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{n+1}{2}\alpha.$$

30. Unter einem *Vektor* versteht man eine nach Größe, Richtung und Sinn bestimmte Strecke. Geht der Vektor vom Koordinatenanfang O nach einem Punkt P, so ist er, ebenso wie P, durch die Polarkoordinaten r und φ dieses Punktes bestimmt; man könnte

1) Nova acta acad. scient. imp. Petropolitanae, Bd. 7 (Jahrg. 1789), S. 87 bis 98, Petersburg 1793; eingereicht 1776. Euler zeigt, daß sich die Summen der Reihen $a+b\cos\alpha+c\cos 2\alpha+\cdots$ und $a+b\sin\alpha+c\sin 2\alpha+\cdots$ angeben lassen, wenn die Summe $f(x)$ der Reihe $a+bx+cx^2+\cdots$ bekannt ist. Man braucht nur in dieser letzten Reihe zu setzen $x=\cos\alpha+i\sin\alpha=p$, bzw. $x=\cos\alpha-i\sin\alpha=q$, wo $i=\sqrt{-1}$ ist; dann folgt leicht

$$a+b\cos\alpha+c\cos 2\alpha+\cdots=\frac{1}{2}(f(p)+f(q))$$

und
$$b\sin\alpha+c\sin 2\alpha+\cdots=\frac{1}{2i}(f(p)-f(q)).$$

Die in Aufg. 28 und 29 vorgelegten Reihen erhält man so aus:

$$1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+x^n=(1+x)^n.$$

den Vektor wie einen Punkt der komplexen Zahlenebene durch $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ darstellen. Hierbei wird die Länge r der *Tensor* des Vektors genannt. Sind r und φ Funktionen einer dritten Größe, z. B. der Zeit t, so kann man den Vektor differenzieren. Es soll nun gezeigt werden, daß die nach t genommene Ableitung wieder einen Vektor $R\{\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)\}$ darstellt, wobei $R = \sqrt{r'^2 + r^2\varphi'^2}$, $R\cos\alpha = r'$, $R\sin\alpha = r\varphi'$ ist und die Akzente bei r' und φ' die nach t genommenen Ableitungen anzeigen sollen.

Die Ableitung von $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ wird zunächst gleich

$$r'\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi' + i(r'\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi');$$

setzt man nun

$$R\cos(\varphi+\alpha) = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi',$$
$$R\sin(\varphi+\alpha) = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi',$$

so folgen leicht die oben angegebenen Werte. Zugleich ergibt sich:

31. Bei konstantem Tensor r ist der die Ableitung von

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

darstellende Vektor rechtwinklig zum ursprünglichen Vektor, denn alsdann ist $\alpha = 90^0$.

§ 4.
Höhere Differentialquotienten.

1. $y = x^k$, $\qquad y^{(n)} = k(k-1)\ldots(k-n+1)x^{k-n}$.
2. $y = a^x$, $\qquad y^{(n)} = a^x\cdot(\ln a)^n$.
3. $y = e^x$, $\qquad y^{(n)} = e^x$.
4. $y = \ln x$, $\qquad y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.
5. $y = \sin x$, $\qquad y^{(n)} = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$.
6. $y = \cos x$, $\qquad y^{(n)} = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$.
7. $y = x^2\cdot\ln x$, $\qquad y''' = \frac{2}{x}$.
8. $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $\qquad y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.
9. $y = x\operatorname{arc\,tg} x$, $\qquad y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2}$.
10. $y = \ln(ax+b)$, $\qquad y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$.
11. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $\qquad y'' = -\frac{8(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3} = -\frac{8y}{(e^x + e^{-x})^2}$.

12. $y = \frac{x+1}{x-1}$, $\qquad y''' = \frac{-12}{(x-1)^4}$.

13. $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $\qquad y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$.

Zum Beweis dieser Formel beachte man, daß $y' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y$, $y'' = -\sin 2y \cdot y' = -\sin 2y \cdot \cos^2 y = \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\cos^2 y$ ist; für y''' folgt $2\sin 3\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos^3 y$. Die Richtigkeit der oben stehenden Formel für $y^{(n)}$ läßt sich alsdann beweisen, indem man unter Voraussetzung ihrer Gültigkeit für einen bestimmten Wert $n = k$ aus der für $n = k$ hingeschriebenen Formel durch Differentiation den Ausdruck für $y^{(k+1)}$ gewinnt, der mit demjenigen übereinstimmen muß, der sich für $n = k+1$ ergibt (Schluß von k auf $k+1$).

14. Zu zeigen, daß für die Funktion $y = a\cos nx + b\sin nx$ die Beziehung $y'' + n^2 y = 0$ stattfindet.

$y'' = -n^2(a\cos nx + b\sin nx)$. Die Funktion $a\cos nx + b\sin nx$ ist die „vollständige Lösung" der „Differentialgleichung zweiter Ordnung" $y'' + n^2 y = 0$.

15. Ebenso zeige man, daß für die Funktion $y = e^{-x}\cdot\sin x$ die Beziehung $y'''' + 4y = 0$ stattfindet. Diese Funktion ist eine „besondere oder partikuläre Lösung" der „Differentialgleichung vierter Ordnung" $y'''' + 4y = 0$.

16. Zu zeigen, daß die n^{te} Ableitung von $y = e^x \sin x$ gleich $e^x \cdot (\sqrt{2})^n \cdot \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$ oder $\dfrac{e^x\cdot\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)}{\sin^n\frac{\pi}{4}}$ ist.

$y' = e^x(\sin x + \cos x) = e^x\left(\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = e^x\cdot 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}$ $= e^x\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Bei jeder folgenden Differentiation tritt ein Faktor $\sqrt{2}$ hinzu und wächst das Argument des Sinus um $\frac{\pi}{4}$.

Ebenso gehören zusammen:

$$y = e^x\cos x \quad\text{und}\quad y^{(n)} = e^x(\sqrt{2})^n\cdot\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right) = \frac{e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)}{\cos^n\frac{\pi}{4}}$$

17. Man zeige, daß die n^{te} Ableitung des Ausdrucks

$$y = e^{ax}\cos(bx+c) \text{ gleich } k^n e^{ax}\cos(bx+c+n\alpha)$$

ist, wobei k und α aus $a = k\cos\alpha$, $b = k\sin\alpha$ zu bestimmen sind.

Hier wird

$$y' = e^{ax}\{a\cos(bx+c) - b\sin(bx+c)\} = ke^{ax}\cos(bx+c+\alpha),$$

wenn die Größen k und α in der angegebenen Weise eingeführt

werden. Man bemerkt, daß bei jeder neuen Differentiation ein Faktor k hinzutritt, während das Argument des Kosinus um α zu vermehren ist.

18. Zu beweisen, daß für die n^{te} Ableitung der Funktion $y = e^x f(x)$ die Formel gilt

$$y^{(n)} = e^x \left\{ f(x) + \binom{n}{1} f'(x) + \cdots + \binom{n}{h} f^{(h)}(x) + \cdots + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) + f^{(n)}(x) \right\}.$$

Unter Voraussetzung der Gültigkeit dieser Gleichung für eine bestimmte, z. B. die k^{te} Ableitung, läßt sich leicht zeigen, daß sie auch für die nächst höhere, die $(k+1)^{\text{te}}$ Ableitung, gilt (Schluß von k auf $k+1$), usf. Der Koeffizient von $e^x f^{(h)}(x)$ in $y^{(n+1)}$ muß $\binom{n+1}{h}$ werden, wie sich durch Differentiation von $y^{(n)}$ unter Anwendung der bekannten Beziehung $\binom{n}{h} + \binom{n}{h-1} = \binom{n+1}{h}$ ergibt. Die Gültigkeit der Formel für $n = 2$ oder $n = 3$ ist sofort bewiesen.

19. Ersetzt man bei der in vorstehender Aufgabe zum Beweis vorgelegten Formel $f(x)$ durch $\sin x$, so folgt mit Rücksicht auf die Ergebnisse dieser Aufgabe und der Aufg. 5, S. 14:

$$\sin x + \binom{n}{1} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \binom{n}{2} \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) + \cdots + \binom{n}{h} \sin\left(x + \frac{h\pi}{2}\right) + \cdots$$
$$+ \binom{n}{1} \sin\left(x + \frac{n-1}{2}\pi\right) + \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = (\sqrt{2})^n \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

Eine ähnliche Reihe ergibt sich durch die Annahme $f(x) = \cos x$ mit Hilfe der n^{ten} Ableitung von $e^x \cos x$.

20. Mit Hilfe des in Aufg. 18 benutzten Beweisverfahrens sei das Leibnizsche Theorem zu beweisen: Die n^{te} Ableitung des Produktes $y = uv$ zweier Funktionen u und v von x wird:

$$y^{(n)} = uv^{(n)} + \binom{n}{1} u' v^{(n-1)} + \binom{n}{2} u'' v^{(n-2)} + \cdots + \binom{n}{h} u^{(h)} v^{(n-h)} + \cdots$$
$$+ \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + u^{(n)} v.$$

21. Aus der für die Funktion $f(x) = \arcsin x$ gültigen Gleichung $(1 - x^2) f''(x) - x f'(x) = 0$ leite man durch n-malige Differentiation mit Hilfe des Leibnizschen Theorems eine Beziehung ab zwischen $f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$ und $f^{(n+2)}(x)$. Man findet

$$(1 - x^2) f^{(n+2)}(x) - \binom{n}{1} \cdot 2x f^{(n+1)}(x) - \binom{n}{2} \cdot 2 f^{(n)}(x) - x f^{(n+1)}(x) - \binom{n}{1} f^{(n)}(x) =$$

oder $(1 - x^2) f^{(n+2)}(x) - (2n+1) x f^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0.$

Ein Punkt durchlaufe eine ebene oder eine Raumkurve und zwar befinde er sich zur Zeit t an einer Stelle P derart, daß die *längs der Bahnkurve gemessene* Entfernung dieser Stelle von einem beliebig aber fest gewählten Punkt O der Kurve, d. h. die *Bogenlänge* oder

Weglänge gleich s ist. Die Geschwindigkeit v, die der Punkt an der Stelle P besitzt, ist alsdann, wie in der Mechanik gezeigt wird, gleich der ersten Ableitung $\frac{ds}{dt}$ der die Bewegung bestimmenden Funktion $s = f(t)$. Offenbar ist diese Ableitung gleich dem Quotient aus dem während des Zeitelementes dt durchlaufenen Bogenelement ds und dem Zeitelement selbst. Die zugehörige Beschleunigung p ist gleich der Ableitung $\frac{dv}{dt}$ der Geschwindigkeit oder also auch $p = \frac{d^2s}{dt^2}$.

22. Ein Punkt bewege sich auf einer Geraden (Abszissenachse) so, daß die ihm zur Zeit t zukommende Abszisse x gegeben ist durch $x = ae^{-bt}$. Man bestimme die zugehörige Geschwindigkeit und Beschleunigung.

$$v = \frac{dx}{dt} = -abe^{-bt} = -bx, \qquad p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = ab^2e^{-bt} = b^2x.$$

23. Um einen Kreis vom Radius a mit gleichförmiger Geschwindigkeit einmal vollständig zu durchlaufen, braucht ein Punkt P die Zeit T. Wie groß sind Geschwindigkeit und Beschleunigung der Projektionen des Punktes auf zwei zueinander rechtwinklige Kreisdurchmesser, deren einer durch den Anfangspunkt der Bewegung gehen soll?

Man wählt natürlich die beiden Durchmesser als Koordinatenachsen. Befindet sich der Punkt P zur Zeit $t = 0$ im Schnittpunkt des Kreises mit der positiven x-Achse und bewegt er sich in dem der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzten Sinn, so sind die Projektionen des Punktes P auf die beiden Koordinatenachsen zur Zeit t gegeben durch

$$x = a\cos\frac{2\pi t}{T}, \qquad y = a\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Hier wird

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2a\pi}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4a\pi^2}{T^2}\cos\frac{2\pi t}{T} = -\frac{4\pi^2}{T^2}x.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2a\pi}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4a\pi^2}{T^2}\sin\frac{2\pi t}{T} = -\frac{4\pi^2}{T^2}y.$$

24. Bei dem *Schubkurbelgetriebe* wird der eine Endpunkt A (der Kurbelzapfen) einer Strecke von der Länge l (der Schubstange oder Pleuelstange) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreise vom Radius a (a = Kurbellänge) geführt, während der andere Endpunkt B (Kreuzkopf) auf einer durch den Kreismittelpunkt gehenden Geraden hin- und hergleitet (Fig. 7). Welche Geschwindigkeit v

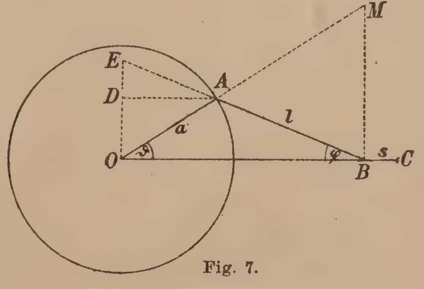


Fig. 7.

hat der Kreuzkopf B in irgend einem Augenblick und mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω_1 dreht sich alsdann die Schubstange um den Kreuzkopf?

Der Mittelpunkt des von A durchlaufenen Kreises liege in O; ferner sei $\sphericalangle AOB = \vartheta$, $\sphericalangle ABO = \varphi$, $OC = a + l$, $BC = s$. Alsdann ist $s = a + l - a\cos\vartheta - l\cos\varphi$ und $v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt} = \omega\frac{ds}{d\vartheta}$, denn $\frac{d\vartheta}{dt}$ ist gleich der Winkelgeschwindigkeit ω, mit der sich die Kurbel OA um O dreht. Mit Rücksicht auf $a\sin\vartheta = l\sin\varphi$ findet man

$$v = a\omega\left\{\sin\vartheta + \frac{a\sin 2\vartheta}{2l\sqrt{1-\frac{a^2}{l^2}\sin^2\vartheta}}\right\} = a\omega\left\{\sin\vartheta + \frac{k\sin 2\vartheta}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}\right\},$$

wenn man das Verhältnis $a:l$, das bei Dampfmaschinen meistens ungefähr gleich $1:5$ ist, gleich k setzt. An Stelle der Winkelgeschwindigkeit ω könnte hier auch die Anzahl der Umdrehungen, die die Kurbel in einer Sekunde macht oder die *Tourenzahl* n eingeführt werden durch $\omega = 2n\pi$.

Die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1$ des Kreuzkopfes B ergibt sich mit Hilfe von $a\sin\vartheta = l\sin\varphi$ durch Differentiation nach t; man erhält $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{a\omega\cos\vartheta}{l\cos\varphi}$.

Man findet übrigens $v = \omega\cdot OE$ und $\omega_1 = \frac{\omega}{l}\cdot AE$, wie mit Hilfe des Dreiecks ADE leicht zu zeigen ist. Dabei bedeutet E den Schnittpunkt der Verlängerung von BA mit dem in O auf OB errichteten Lot und D die Projektion des Punktes A auf dieses Lot.

Ferner ist auch $v = a\omega\cdot\frac{MB}{MA}$ und $\omega_1 = \frac{a\omega}{MA}$, wo M das Momentanzentrum für die Bewegung der Strecke AB bedeutet (M ist der Schnittpunkt der durch A und B rechtwinklig zu den jeweiligen Bewegungsrichtungen dieser Punkte gezogenen Geraden).

25. Bei dem soeben betrachteten Schubkurbelgetriebe die Beschleunigung p des Kreuzkopfes in irgend einem Augenblick zu bestimmen.

$$p = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = a\omega^2\left\{\cos\vartheta + \frac{k\cos 2\vartheta + k^3\sin^4\vartheta}{(1-k^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Da dieser Ausdruck die Größe ω^2 zum Faktor hat, erkennt man, daß die Beschleunigung wie das *Quadrat der Tourenzahl* wächst.

26. Man bestimme beim Schubkurbelgetriebe die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kreuzkopfes für den dem Wert $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$

(d. h. 90⁰) entsprechenden Augenblick der Höchstlage des Kurbelzapfens A.

$$v_{\frac{1}{2}\pi} = a\omega,\ p_{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{a^2\omega^2}{\sqrt{l^2-a^2}} = -a\omega^2 \operatorname{tg}\psi,$$

wenn $k = a : l = \sin\psi$ gesetzt wird.

27. Die gleiche Aufgabe für den Augenblick, in dem die Kurbel und die Schubstange zu einander rechtwinklig sind.

Man findet

$$v = a\omega\sqrt{1+k^2} = \frac{a\omega}{l}\sqrt{a^2+l^2},$$

$$p = a\omega^2 k^3\sqrt{1+k^2} = \frac{a\omega^2\cot^3\vartheta}{\sin\vartheta},$$

wobei $\cot\vartheta = \frac{a}{l} = k$ ist.

28. Wie groß ist die Beschleunigung des Kreuzkopfes in den beiden Totlagen ($\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$)?

$$p_0 = a\omega^2\frac{(a+l)}{l},\ p_\pi = a\omega^2\frac{(a-l)}{l},\ \text{somit } p_0 : p_\pi = (a+l):(a-l).$$

29. Man bestimme die Geschwindigkeit v des Kreuzkopfes des Schubkurbelgetriebes für den Fall, wo die Gerade, auf der sich der Kreuzkopf bewegt, nicht durch den Mittelpunkt O des vom Kurbelzapfen beschriebenen Kreises geht, sondern von O um die Strecke c entfernt ist (exzentrisches Schubkurbelgetriebe, Fig. 8).

In der Figur entspricht $\vartheta = 0$ derjenigen Lage OA_0 der Kurbel, bei der diese zu der von B beschriebenen Geraden parallel ist. Für eine Totlage müssen O, A und B in einer und derselben Geraden liegen. Über die verschiedenen Fälle, die beim exzentrischen Schubkurbelgetriebe entsprechend den verschiedenen Längen der Strecken a, l und c auftreten können, vgl. F. Ebner „Leitfaden der technisch wichtigen Kurven", Leipzig 1906, S. 32 ff. und 72 ff.

Hier wird $s = a + \sqrt{l^2 - c^2} - a\cos\vartheta - l\cos\varphi$ und

$$v = a\omega\left\{\sin\vartheta + \frac{(c + a\sin\vartheta)\cos\vartheta}{\sqrt{l^2-(c+a\sin\vartheta)^2}}\right\}.$$

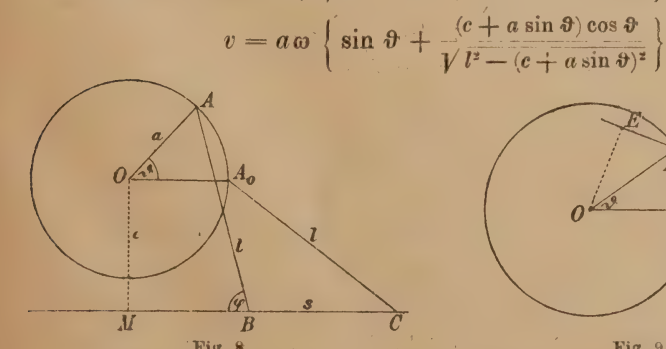


Fig. 8.

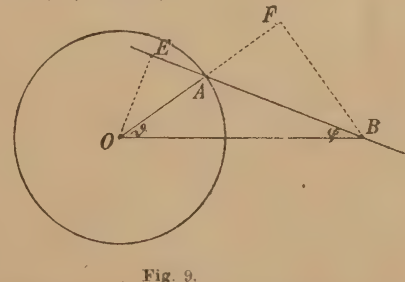


Fig. 9.

30. Eine Gerade bewegt sich so, daß ein Punkt A derselben mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω einen Kreis vom Radius a be-

schreibt, während sie im übrigen gezwungen ist, stets durch einen fest gegebenen Punkt B, der vom Mittelpunkt O des Kreises um die Strecke b entfernt ist, hindurchzugehen (oszillierendes Schubkurbelgetriebe, Fig. 9).

Man bestimme die Geschwindigkeit v, mit der die Gerade AB durch B gleitet, sowie die zugehörige Beschleunigung p, ferner die Winkelgeschwindigkeit ω_1, mit der sich AB um B dreht für den Augenblick, in dem OA mit OB den Winkel ϑ bildet.

Setzt man $AB = s$, $\sphericalangle ABO = \varphi$, so wird

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ab\omega \sin\vartheta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta}} = \frac{ab\omega\sin\vartheta}{AB} = b\omega\sin\varphi,$$

$$p = \frac{ab\omega^2\{(a^2 + b^2)\cos\vartheta - 2ab\}}{2(a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mit Hilfe der Gleichung $a\sin(\vartheta + \varphi) - b\sin\varphi = 0$ findet man

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{a\omega(b\cos\vartheta - a)}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta} = \omega \cdot \frac{EA}{AB},$$

wo E der Fußpunkt des von O auf die Gerade BA gefällten Lotes ist. Man kann auch schreiben $\omega_1 = \frac{a\omega \cdot AF}{AB^2}$, wo F der Fußpunkt des von B auf die Gerade OA gefällten Lotes ist.

31. Man zeige, daß die Kurve $y = \frac{f(x)}{f'(x)}$ die x-Achse im allgemeinen nur unter Winkeln von 45^0 schneidet.[1])

$$y' = 1 - \frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2} = 1 - \frac{yf''(x)}{f'(x)}.$$

Beispiele hierzu sind $y = \operatorname{tg} x$, $y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{2(ax + b)}$. Ebenso folgt, daß die Kurve $y = \frac{af(x)}{f'(x)}$ die x-Achse im allgemeinen nur unter solchen Winkeln α schneidet, für die $\operatorname{tg}\alpha = a$ ist. Besonderer Untersuchung würden solche Fälle bedürfen, in denen $\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ für $f(x) = 0$ in un-

---

1) Hiermit ist auch ein Satz bewiesen, der in der Algebra, gewöhnlich unter Beschränkung auf ganze Funktionen $f(x)$, in folgender Form ausgesprochen zu werden pflegt: Läßt man die Veränderliche x in positivem Sinn wachsen, so geht der Quotient $\frac{f(x)}{f'(x)}$, so oft er verschwindet, von einem negativen zu einem positiven Zahlenwert über. Gleiches würde natürlich auch von dem Produkt $f(x)f'(x)$ gelten. Dieser Satz wird als Hilfssatz beim Beweis des Sturm'schen Theorems benutzt, mit Hilfe dessen sich die Anzahl der zwischen zwei reellen Zahlen α und β liegenden reellen Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades $f(x) = 0$ bestimmen läßt. Vgl. bezüglich dieses Hilfssatzes z. B. J. A. Serret „Handbuch der höheren Algebra“, deutsch von G. Wertheim, 2. Aufl. Bd. 1, Leipzig 1878, S. 218 und 231 oder auch E. Netto „Vorlesungen über Algebra“, 1. Bd., Leipzig 1896, S. 209.

bestimmter Form erscheint, also z. B. wenn mit $f(x)$ auch $f'(x)$ verschwindet.

32. Ist $f(x)$ eine Funktion, die bei Vertauschung von x mit $-x$ unverändert bleibt (gerade Funktion, vgl. Aufg. 43, S. 6), so haben alle Ableitungen ungerader Ordnung von $f(x)$ für $x=0$ den Wert Null.

$$f(x)=f(-x), \text{ daher } f'(x)=-f'(-x) \text{ und } f'(0)=-f'(0) \text{ usw.}$$

33. Zu zeigen, daß eine k-fache Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ eine $(k-1)$fache Wurzel von $f'(x)=0$, $(k-2)$fache Wurzel von $f''(x)=0$, usw. ist.

Aus
$$f(x)=(x-a)^k\varphi(x)$$
folgt
$$f'(x)=(x-a)^{k-1}\{k\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)\}, \text{ usw.}$$

34. Es seien $x_1, x_2, \cdots x_n$ die Wurzeln einer Gleichung $n^{\text{te.}}$ Grades $f(x)=0$; man zeige, daß

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\cdots+\frac{1}{x-x_n}$$

und

$$\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x-x_2)^2}+\cdots+\frac{1}{(x-x_n)^2}.$$

Logarithmische Differentiation der Funktion

$$f(x)=c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

gibt für $\frac{f'(x)}{f(x)}$ den angegebenen Ausdruck.

35. Im Anschluß an diese Aufgabe soll bewiesen werden, daß die Gleichung $f'^2(x)-f(x)\cdot f''(x)=0$ keine reelle Wurzeln hat, wenn $f(x)=0$ nur reelle, von einander verschiedene Wurzeln hat.

Der Ausdruck $f'^2(x)-f(x)\cdot f''(x)$ stellt sich als Summe von nur positiven Größen dar, falls die Wurzeln von $f(x)$ sämtlich reell sind. Da eine reelle Doppelwurzel von $f(x)=0$ auch Doppelwurzel von $f'^2(x)-f(x)\cdot f''(x)=0$ wäre (Aufg. 33), ist in dem Satz vorausgesetzt, daß die Gleichung $f(x)=0$ keine mehrfachen Wurzeln hat.

36. Man beweise den Satz: Sind f und φ zwei ganze Funktionen n^{ten} Grades von x, so ist der Ausdruck

$$(f\varphi)\equiv f\cdot\varphi^{(n)}-f'\cdot\varphi^{(n-1)}+f''\cdot\varphi^{(n-2)}-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\cdot f^{(n-1)}\cdot\varphi'+(-1)^n\cdot f^{(n)}\cdot\varphi$$

von x unabhängig, also nur abhängig von den Koeffizienten der Funktionen f und φ.

Man hat nur zu zeigen, daß $\frac{d(f\varphi)}{dx}$ verschwindet.

Im Falle

$$f\equiv a_0x^n+\binom{n}{1}a_1x^{n-1}+\binom{n}{2}a_2x^{n-2}+\cdots+\binom{n}{1}a_{n-1}x+a_n,$$

$$\varphi\equiv b_0x^n+\binom{n}{1}b_1x^{n-1}+\binom{n}{2}b_2x^{n-1}+\cdots+\binom{n}{1}b_{n-1}x+b_n$$

findet man:

$$\frac{1}{n!}(f\varphi) = a_n b_0 - \binom{n}{1} a_{n-1} b_1 + \binom{n}{2} a_{n-2} b_2 - \cdots$$
$$+ (-1)^h \binom{n}{h} a_{n-h} b_h + \cdots + (-1)^n a_0 b_n.$$

Sind f und φ identisch, so wird $(ff) = 0$, falls n eine ungerade Zahl ist; im Falle eines geraden n ist jedoch (ff) im allgemeinen von Null verschieden. Für $n = 2$ wird z. B. (ff) gleich der Diskriminante $4(a_0 a_2 - a_1^2)$.

§ 5.

Funktionen von mehreren Funktionen. Differentiale.

1. Hat man $z = f(u, v, w, \cdots)$, wo $u, v, w, \cdots$ Funktionen von x sind, so ist in letzter Linie z eine Funktion von x allein, durch Vermittelung von $u, v, w \cdots$. Der *vollständige* oder *totale Differentialquotient* dieser Funktion ist:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \cdots,$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}, \cdots$ *partielle Differentialquotienten* oder *partielle Ableitungen* bedeuten. Statt $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \cdots$ kann man auch $f_u, f_v, \cdots$ oder $f'(u), f'(v), \cdots$ schreiben.

Die zu Anfang von § 1 angegebenen Regeln 1 — 4 sind nur besondere Fälle des vorstehenden Satzes über die Differentiation von $f(u, v, w, \cdots)$.

2. Das vollständige oder totale Differential der Funktion $z = f(x, y, t, \cdots)$ von mehreren Veränderlichen $x, y, t, \cdots$ ist

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \cdots.$$

Sind insbesondere $y, t, \cdots$ Funktionen von einer und derselben Veränderlichen x, z. B. $y = \chi(x)$, $t = \psi(x)$, so wird $dy = \chi'(x) \cdot dx$, $dt = \psi'(x) \cdot dx$.

Die Ausdrücke $\frac{\partial f}{\partial x} dx, \frac{\partial f}{\partial y} dy, \cdots$ sind unvollständige oder partielle Differentiale.

3. Wenn die Funktion $f(x, y)$ an der Stelle x, y stetig ist und daselbst stetige Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}$ besitzt, hat der Differentialquotient $\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}$ an dieser Stelle denselben Wert wie $\frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x}$, d. h. die Reihenfolge der Differentiationen ist alsdann beliebig.

4. Das vollständige Differential zweiter Ordnung von $z = f(x, y, t)$ wird:

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} dx \cdot dy$$
$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial t} dx \cdot dt + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial t} dy \cdot dt$$

oder symbolisch geschrieben:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial t} dt\right)^2 f.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \cdot \partial x}, \text{ usw.}$$

sei.

Die Verallgemeinerung auf den Fall von mehr als drei Veränderlichen ist ersichtlich.

5. Das vollständige Differential n^{ter} Ordnung von $z = f(x, y)$ ist:

$$d^n z = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \cdot \partial y} dx^{n-1} \cdot dy + \cdots$$
$$+ \binom{n}{h} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-h} \partial y^h} dx^{n-h} \cdot dy^h + \cdots$$
$$+ \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x \cdot \partial y^{n-1}} dx \cdot dy^{n-1} + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n$$

oder symbolisch geschrieben:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f.$$

Beispiele.

1. Gegeben $z = au^3 + 3bu^2v + 3cuv^2 + ev^3$, wobei $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. Zu bilden $\frac{dz}{dx}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v}$.

$$\frac{dz}{dx} = 3(au^2 + 2buv + cv^2)\varphi'(x) + 3(bu^2 + 2cuv + ev^2)\psi'(x),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 6(au + bv), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 6(cu + ev), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \cdot \partial u} = 6(bu + cv).$$

2. $z = e^x \cos y - e^y \sin x$. Zu bilden $\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = - e^x \sin y - e^y \cos x.$$

3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, wobei $y = \varphi(x)$. Zu bilden

$$\frac{dz}{dx}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}.$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\varphi'(x),\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

4. Welche Beziehung muß zwischen den Koeffizienten A, B, C, D der „partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung"

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + C\frac{\partial z}{\partial x} + D\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

und den in der Funktion $z = e^{ax+by+c}$ auftretenden Konstanten a, b, c stattfinden, wenn diese Funktion z der Differentialgleichung genügen soll?

$$Aa^2 + Bb^2 + Ca + Db = 0,$$

eine von c unabhängige Bedingung.

5. Man zeige, daß die für die mathematische Physik (z. B. für die Theorie der Wärmeleitung) wichtige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

erfüllt wird durch die Funktionen $y = e^{-kn^2t}\sin nx$ und $y = e^{-kn^2t}\cos nx$, sowie durch $y = \sum_i a_i e^{-kn_i^2t}\sin n_i x + \sum_i b_i e^{-kn_i^2t}\cos n_i x$, wo über i zu summieren ist und die Anzahl der Summanden zunächst endlich, im übrigen beliebig groß ist.

Die Tatsache erhellt schon bei etwa zwei Gliedern der ersten Summe: $y = a_1 e^{-kn_1^2t}\sin n_1 x + a_2 e^{-kn_2^2t}\sin n_2 x$. Hier wird

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -n_1^2 a_1 e^{-kn_1^2t}\sin n_1 x - n_2^2 a_2 e^{-kn_2^2t}\sin n_2 x,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -kn_1^2 a_1 e^{-kn_1^2t}\sin n_1 x - kn_2^2 a_2 e^{-kn_2^2t}\sin n_2 x = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Unter welcher Bedingung die Anzahl der Summanden unendlich groß werden kann, bedarf besonderer Untersuchung.

6. Zu zeigen, daß die für die mathematische Physik (z. B. für die Akustik und die Theorie schwingender Federn) wichtige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

erfüllt wird durch $y = \varphi(x+kt) + \psi(x-kt)$, wo φ und ψ beliebige Funktionen der zugehörigen Argumente bedeuten.

Setzt man der Kürze halber $x + kt = u$, $x - kt = v$, so wird

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right).$$

7. Ist r die gegenseitige Entfernung zweier Punkte $P\,(x, y)$ und $P_1\,(x_1, y_1)$ in der Ebene, also $r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$, so findet stets die Beziehung statt

$$\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} = 0.$$

Dies soll bewiesen werden.

$$\frac{\partial \ln r}{\partial x} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_1}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(x-x_1)}{r^3}\,\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(x-x_1)^2}{r^4},$$

analog $\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(y-y_1)^2}{r^4}$.

Man schreibt die Gleichung $\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} = 0$ gewöhnlich in der Form $\Delta \ln r = 0$, wo also Δ das Differentiationssymbol $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ bedeutet.

Ist statt des einen Punktes P_1 ein ganzes Punktsystem gegeben und bezeichnet r_i den Abstand des Punktes P_i dieses Systems von P, so ist immer noch $\Delta \Sigma m_i \ln r_i = 0$, wo die Größen m_i beliebige Konstanten sind und die Summation über alle Punkte des Systems auszudehnen ist. Natürlich besteht die Voraussetzung, daß keiner der Punkte P_i mit P zusammenfällt. Die Punkte P_i und P können auch materielle Punkte sein, so daß P_i die Masse m_i, P die Masse m besitzt. Wenn dann zwischen P und den einzelnen Punkten P_i Kräfte R_i wirken, die umgekehrt proportional dem Abstande r_i, proportional dem Produkt der Massen $m m_i$ sind $\left(R_i = \frac{m m_i}{r_i}\right)$, so gelten für die den Koordinatenachsen parallelen Komponenten X, Y der Summe aller dieser Kräfte die Formeln

$$X = -m\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -m\frac{\partial V}{\partial y},$$

und hier heißt

$$V = \sum m_i \ln \frac{1}{r_i} = -\sum m_i \ln r_i$$

das *logarithmische Potential*[1]) des Systems der Punkte P_i in bezug auf P. Für dieses Potential V gilt daher die Gleichung $\Delta V = 0$.

8. Ähnliches gilt im Raum, wenn zwischen dem Punkt $P(x, y, z)$ und den Punkten P_i mit den rechtwinkligen Koordinaten x_i, y_i, z_i Kräfte $R_i = \frac{m m_i}{r_i^2}$ entsprechend dem Newtonschen Anziehungsgesetz wirken. Hier wird das Newtonsche Potential V gleich $\sum \frac{m_i}{r_i}$, und es ist alsdann

$$X = -m\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -m\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -m\frac{\partial V}{\partial z}.$$

---

1) Vgl. C. Neumann im Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. 59 (1861), S. 335f., ferner dessen „Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential“, Leipzig 1877, S. 4 und 12.

Nun soll gezeigt werden, daß die Gleichung besteht:

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

falls P mit keinem der Punkte P_i zusammenfällt (Laplacesche Differentialgleichung).[1])

Beim Beweis kann man sich auf P und nur *einen* Punkt P_1 beschränken. Ist r der Abstand PP_1, so wird $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x_1 - x}{r^3}$,

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} - \frac{3(x_1 - x)}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x_1 - x)^2}{r^5},$$

analoge Werte haben $\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}$.

9. Was wird aus dem Ausdruck $\Delta f(x, y, z) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, wenn an Stelle der Funktion $f(x, y, z)$ das Produkt zweier Funktionen $\varphi(x, y, z) \cdot \psi(x, y, z)$ tritt?

Man findet

$$\Delta(\varphi \cdot \psi) = \varphi \cdot \Delta\psi + \psi \cdot \Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right).$$

10. Den Satz zu beweisen: Ist $f(x, y, z)$ eine homogene Funktion n^{ten} Grades von drei Veränderlichen x, y, z, ist also $f(xt, yt, zt) \equiv t^n f(x, y, z)$, so findet die Beziehung statt:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z).$$

Man differenziert die angeführte Bedingung der Homogenität nach t und setzt alsdann $t = 1$. Natürlich gilt eine entsprechende Beziehung auch bei homogenen Funktionen von beliebig vielen Veränderlichen (Satz von Euler über homogene Funktionen).

11. Sind φ, χ, ψ drei ganze homogene Funktionen beliebigen, aber gleichen Grades n von zwei Veränderlichen x_1, x_2 (binäre Formen n^{ten} Grades), so findet die Beziehung statt:

$$\begin{vmatrix} \varphi & \chi & \psi \\ \varphi_1 & \chi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \chi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

wobei die Differentiation nach x_1 durch den Index 1 und die nach x_2 durch den Index 2 angedeutet ist.

1) Laplace im „Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne" in den Mémoires de l'acad. roy. des sciences de Paris, année 1787, Paris 1789, S. 252 = Oeuvres complètes, Bd. 11, Paris 1895, S. 278.

Folgt mit Hilfe des vorerwähnten Eulerschen Satzes über homogene Funktionen, denn es ist hiernach

$$\varphi = \frac{1}{n}(\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2), \quad \chi = \frac{1}{n}(\chi_1 x_1 + \chi_2 x_2), \quad \psi = \frac{1}{n}(\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2),$$

die oben stehende Determinante verschwindet daher identisch. Die Verallgemeinerung für k ganze homogene Funktionen n^{ten} Grades von $k-1$ Veränderlichen ist klar.

12. Es sei gegeben $z = f(u, v, w)$, wo u, v, w Funktionen von x sind, so daß z als eine Funktion von x allein zu betrachten ist; man bilde die zweite Ableitung $\frac{d^2 z}{dx^2}$ unter der Voraussetzung, daß f sowie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f stetige Funktionen von u, v und w.

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} u'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \cdot \partial v} u' v' + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} v'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \cdot \partial w} u' w' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \cdot \partial w} v' w'$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} w'^2 + \frac{\partial f}{\partial u} u'' + \frac{\partial f}{\partial v} v'' + \frac{\partial f}{\partial w} w''.$$

13. Man zeige, daß die Determinante[1])

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix},$$

in der y_1, y_2, y_3 Funktionen von x sind, während y_i', y_i'' $(i = 1, 2, 3)$ die zugehörigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung bedeuten, nach x differenziert wird, indem man die y_i'' ersetzt durch die dritten Ableitungen y_i''' $(i = 1, 2, 3)$.

Δ ist eine Funktion von $y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3', y_1'', y_2'', y_3''$, daher

$$\frac{d\Delta}{dx} = \sum_1^3{}^i \frac{\partial \Delta}{\partial y_i} y_i' + \sum_1^3{}^i \frac{\partial \Delta}{\partial y_i'} y_i'' + \sum_1^3{}^i \frac{\partial \Delta}{\partial y_i''} y_i''' = \sum_1^3{}^i \frac{\partial \Delta}{\partial y_i''} y_i''',$$

denn die beiden ersten Summen verschwinden identisch. Die übrig bleibende Summe ist, als Determinante geschrieben, gleich

---

1) Wronskische Determinante. Sie ist, wenn vom n^{ten} Grade, wichtig bei Untersuchung der linearen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von n gegebenen Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$, indem ihr identisches (für alle Werte von x stattfindendes) Verschwinden anzeigt, daß zwischen den y_i mindestens eine lineare Beziehung besteht. Ferner ist die Wronskische Determinante wichtig für die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Zu dem oben zum Beweis gestellten Satz vgl. C. J. Malmstèn im Journ. für die reine u. angew. Math. Bd. 39, S. 93 (1849), ferner R. Baltzer, „Theorie und Anwendung der Determinanten“, 5. Aufl. Leipzig 1881, S. 30f., E. Pascal, „Die Determinanten“, deutsche Ausgabe von H. Leitzmann, Leipzig 1900, S. 48-50, G. Kowalewski „Einführung in die Determinantentheorie“, Leipzig 1909, S. 327ff.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}.$$

Offenbar gilt ein entsprechender Satz für Determinanten beliebigen Grades, die analog wie Δ gebaut sind.

14. Zu zeigen, daß die partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x+iy)$ der komplexen Veränderlichen $x+iy=z$ der Gleichung genügen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{oder auch} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Dabei ist die Ableitung $\frac{df(z)}{dz}$ gerade so wie bei Funktionen reeller Veränderlichen definiert durch $\lim\limits_{\Delta z=0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$.

Es ist $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}$; hingegen wird $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{df}{dz}$. Man sieht sofort, daß überdies $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ist.

15. Auch die Umkehrung gilt: Genügen die partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x, y)$ der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$, so ist $f(x, y)$ eine Funktion von $x+iy$ allein.

Zum Beweis dieser Umkehrung setze man $x+iy=2p$, $x-iy=2q$, führe mit Hilfe dieser Gleichungen an Stelle von x und y die Größen p und q in $f(x, y)$ ein und zeige, daß auf Grund der Beziehung $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial q}$ verschwindet, wodurch f als unabhängig von q erwiesen ist; hingegen wird $\frac{\partial f}{\partial p} = 2\frac{\partial f}{\partial x}$.

16. Wird die Funktion $f(x+iy)$ in die Form gebracht

$$u(x, y) + iv(x, y),$$

wo u und v reelle Funktionen von x und y sind, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{ferner} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Funktionen u und v nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in einem gewissen Bereich der Wertepaare x, y stetige Funktionen von x und y sind.

Ist umgekehrt $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, so stellt $u+iv$ eine Funktion von $x+iy$ dar.

Diese beiden Sätze werden analog bewiesen wie die beiden vorangehenden in Nr. 14 und 15. Die Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ heißen die Cauchy-Riemannschen Gleichungen, sie finden sich übrigens schon bei d'Alembert.

17. Das Differential dz der Funktion

$$z = 2x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 8y^2 - 7xy + 6x$$

zu bilden.

$$dz = (6x^2 - 10xy + 3y^2 - 7y + 6)\,dx + (-5x^2 + 6xy - 16y - 7x)\,dy.$$

18. Die gleiche Aufgabe für $z = a \sin^2 x + b \sin x \cos y + c \cos^2 y$.

$$dz = (2a \sin x + b \cos y) \cos x \cdot dx - (b \sin x + 2c \cos y) \sin y \cdot dy.$$

19. Man bilde die partiellen Differentiale erster Ordnung der Funktion $z = \sin x \cdot \ln y + \cos y \cdot \ln x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx = \left(\cos x \cdot \ln y + \frac{1}{x} \cos y\right) dx, \quad \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left(\frac{1}{y} \sin x - \sin y \cdot \ln x\right) dy.$$

20. Den Satz zu beweisen: Sind M und N stetige Funktionen von x und y mit stetigen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung und ist $dz = M dx + N dy$ ein vollständiges Differential, so gilt die Beziehung $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Ist dz das vollständige Differential einer Funktion $f(x, y)$, so wird $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. Diese Gleichung gilt innerhalb eines gewissen Bereiches der Veränderlichen x, y; daher ergibt eine Vergleichung mit $dz = M dx + N dy$ die Beziehungen $M = \frac{\partial f}{\partial x}$, $N = \frac{\partial f}{\partial y}$, woraus $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ folgt.

Wie in der Integralrechnung gezeigt wird, ist übrigens $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingung dafür, daß $M dx + N dy$ das vollständige Differential einer Funktion $f(x, y)$ darstellt. Auch läßt sich zeigen, daß ein Ausdruck $M dx + N dy$, der noch kein vollständiges Differential ist, stets durch Multiplikation mit gewissen Funktionen von x und y zu einem solchen Differential gemacht werden kann.

21. Die Seiten AC und AB eines Dreiecks ABC haben die Längen b bzw. c, der eingeschlossene Winkel α wurde gemessen, doch sei das Resultat der Messung infolge Unvollkommenheit der Beobachtung mit einem unvermeidlichen Fehler $d\alpha$ behaftet. Wie groß ist der Einfluß dieses Fehlers auf die Angabe der zu bestimmenden Seitenlänge $BC = a$?

Aus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ folgt $a\,da = bc \sin \alpha \cdot d\alpha = ab \sin \gamma \cdot d\alpha$ oder $da = b \sin \gamma \cdot d\alpha = h_a \cdot d\alpha$, wenn h_a die Länge der zur Seite a gehörigen Höhe bedeutet. Der bei Bestimmung von a auftretende Fehler da ist daher zur Höhe h_a und zu $d\alpha$ proportional. In der Gleichung $da = h_a \cdot d\alpha$ bedeutet $d\alpha$ natürlich das Bogenmaß des Winkels $d\alpha$.

Für die Berechnung oder Abschätzung eines Fehlers ist folgende Bemerkung wichtig: Man kann 1) nach dem *absoluten Fehler* fragen, also z. B. nach dem Betrag von da, 2) nach dem *relativen Fehler*, d. h. nach dem Verhältnis $da:a$ des absoluten Fehlers da zu der zu messenden Größe a, 3) nach dem *prozentualen Fehler* $100\frac{da}{a}\,\%$, d. h. nach dem in Prozenten ausgedrückten Betrag des relativen Fehlers. Die Kenntnis von $da:a$ oder von $100\frac{da}{a}$ pflegt wichtiger zu sein als die Kenntnis des absoluten Fehlers. In den meisten Fällen ist man übrigens nicht in der Lage diese drei Arten von Fehlern *genau* zu bestimmen, vielmehr handelt es sich fast stets darum Grenzen anzugeben, innerhalb deren die Beträge dieser Fehler gelegen sind.

22. Beispiel zu Aufg. 21: Es sei $h_a = 400$ m, der bei Messung des Winkels α begangene Fehler liege innerhalb der Grenzen $\pm 20''$.

Hier wird $da = \pm\frac{400\cdot 20}{206264{,}8}$ m $= \pm 3{,}88$ cm, d. h. der bei Bestimmung von a auftretende Fehler liegt innerhalb der Grenzen $\pm 3{,}88$ cm, beträgt daher noch nicht $0{,}01\,\%$. Der Divisor 206264,8 rührt davon her, daß in der Formel $da = h_a\cdot d\alpha$ der Faktor $d\alpha$ den zum Zentriwinkel $d\alpha$ gehörigen Kreisbogen beim Kreis vom Radius Eins bedeutet. Für den zum beliebigen Zentriwinkel φ dieses Kreises gehörigen Bogen arc φ gilt nun die Proportion $\operatorname{arc}\varphi : 2\pi = \sphericalangle\,\varphi : 360^0$ oder $\operatorname{arc}\varphi = \frac{\pi\cdot\varphi}{180} = \frac{\varphi}{57{,}2958}$, wenn φ in Graden gegeben ist. Wenn aber φ in Sekunden gegeben ist, so tritt im Nenner der Faktor $60^2 = 3600$ hinzu und man erhält

$$\operatorname{arc}\varphi = \frac{\varphi}{206\,264{,}8} = \varphi\cdot 0{,}0000048481.$$

23. Die Entfernung zweier Punkte P und P_1 mit den Koordinaten x, y bzw. x_1, y_1 sei s. Um welchen Betrag ändert sich s, wenn diese Punkte die Verrückungen dx, dy und dx_1, dy_1 erfahren und wieviel Prozent p der Länge s beträgt diese Änderung?

Aus $s^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2$ folgt $s\cdot ds = (x-x_1)(dx-dx_1) + (y-y_1)(dy-dy_1)$ und $ds = (dx-dx_1)\cos\alpha + (dy-dy_1)\sin\alpha$, wo α den Winkel bezeichnet, den die von P_1 in der Richtung nach P gezogene Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt. Für p ergibt sich der Wert $\frac{ds}{s}\cdot 100$.

24. Beispiel zu Aufg. 23: Es sei $s = 4200$ m, $\alpha = 34^0\,17'\,25''$, $dx = -1$ m, $dy = 3$ m, $dx_1 = 4$ m, $dy_1 = 2$ m; man bestimme das Verhältnis $\frac{ds}{s}$ und die Prozentzahl p.

Wenngleich hier die Änderungen der Koordinaten ein paar Meter

betragen, so mögen sie doch verglichen mit der über 4 Kilometer langen Strecke s als Differentiale angesehen werden. Es wird

$$\frac{ds}{s} = \frac{\cos\alpha}{s}(dx - dx_1) + \frac{\sin\alpha}{s}(dy - dy_1)$$
$$= 0{,}00020 \cdot (-5) + 0{,}00013 \cdot 1 = -0{,}00087,$$

$ds = -3{,}65$ m, die Entfernung der Punkte P, P_1 hat um 3,65 m abgenommen oder um 0,087 %.

25. Zwei Punkte P und P_1 haben die Koordinaten x, y bzw. x_1, y_1; die Strecke $P_1 P$ sei gleich s und der Winkel α möge ebenso definiert sein wie in Aufg. 23. Der Punkt P_1 sei ein fester Standpunkt. Welche Änderung erfährt der Winkel α, wenn der Punkt P an die Stelle $x + dx$, $y + dy$ rückt?

Man findet:

$$d\alpha = \frac{\cos\alpha}{s} dy - \frac{\sin\alpha}{s} dx,$$

denn aus $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ folgt $\ln \operatorname{tg}\alpha = \ln(y - y_1) - \ln(x - x_1)$ und

$$\frac{d\alpha}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos^2\alpha} = \frac{dy}{y - y_1} - \frac{dx}{x - x_1} = \frac{dy}{s \cdot \sin\alpha} - \frac{dx}{s \cdot \cos\alpha}.$$

Will man den Winkel $d\alpha$ statt in Bogenmaß etwa in *Sekunden* ausdrücken, so ist der angegebene Ausdruck für $d\alpha$ noch mit $\varkappa = 206\,264{,}8$ zu multiplizieren (vgl. Aufg. 22).

26. Beispiel zu Aufg 25: Es sei $s = 3\,500$ m, $\alpha = 52^0\,13'\,24''$, $dx = 1$ m, $dy = 2$ m.

Man findet

$$\frac{\varkappa\cos\alpha}{s} = 36{,}1, \quad \frac{\varkappa\sin\alpha}{s} = 46{,}6,$$

daher ist $d\alpha$ ein Winkel von 25,6 Sekunden.

27. Wie groß ist die Änderung des Winkels α, wenn sich in Aufgabe 25 auch die Koordinaten von P_1 um Beträge dx_1, dy_1 ändern?

Aus $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ folgt

$$\frac{d\alpha}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos^2\alpha} = \frac{dy - dy_1}{y - y_1} - \frac{dx - dx_1}{x - x_1},$$
$$d\alpha = \frac{\cos\alpha}{s}(dy - dy_1) - \frac{\sin\alpha}{s}(dx - dx_1),$$

was noch mit $\varkappa = 206\,264{,}8$ zu multiplizieren ist, wenn man $d\alpha$ in Bogensekunden haben will.

28. Beispiel zu Aufg. 27: Man berechne $d\alpha$ bei dem Beispiel Nr. 24.

Hier wird

$$\frac{\varkappa\cos\alpha}{s} = 40{,}6, \quad \frac{\varkappa\sin\alpha}{s} = 27{,}7,$$

für $d\alpha$ findet man einen Winkel von 179,1 Sekunden oder von $2'\,59''\,1$

29. Die vier Fundamentalformeln der *sphärischen Trigonometrie* sind:

1) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$,

2) $\sin a \sin B = \sin b \sin A$,

3) $\cos A \cos c = \cot b \sin c - \cot B \sin A$,

4) $\cos A = - \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$.

Man zeige, daß zwischen den Differentialen der in diese einzelnen Gleichungen eingehenden Größen die Gleichungen bestehen[1]):

1) $da = \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc + \sin B \sin c \cdot dA$

2) $\cot a \cdot da - \cot b \cdot db = \cot A \cdot dA - \cot B \cdot dB$

3) $\sin C \cdot db = \sin b \cos C \cdot dA + \cos a \sin B \cdot dc + \sin a \cdot dB$.

4) $dA + \cos c \cdot dB + \cos b \cdot dC = \sin B \sin c \cdot da$.

30. Wenn man das auf das Gewicht des Wassers als Einheit bezogene spezifische Gewicht s eines festen Körpers bestimmen will, hat man bekanntlich das absolute Gewicht p des Körpers durch das absolute Gewicht w eines gleich großen Volumens Wasser zu dividieren, es ist $s = p : w$. (Die Bestimmung von p und w kann z. B. mit Hilfe der hydrostatischen Wage erfolgen.) In welcher Weise wird die Berechnung von s durch kleine Fehler dp und dw, die bei der Bestimmung von p und w erfolgen, beeinflußt?

$$ds = \frac{w\,dp - p\,dw}{w^2}.$$

Der größte Wert des Gesamtfehlers df würde sich offenbar bei Werten dp und dw von entgegengesetztem Vorzeichen ergeben. Um ihn anzugeben, schreibt man

$$df = \left|\frac{\partial s}{\partial p}\,dp\right| + \left|\frac{\partial s}{\partial w}\,dw\right|,$$

wo die vertikalen Striche bedeuten, daß der absolute Betrag der zwischen diesen Strichen stehenden Größe zu nehmen ist. Man findet

$$df = \left|\frac{1}{w}\,dp\right| + \left|\frac{p}{w^2}\,dw\right| \quad \text{und} \quad \frac{df}{s} = \left|\frac{dp}{p}\right| + \left|\frac{dw}{w}\right|.$$

Ein Irrtum von β Prozent bei der Bestimmung von p beeinflußt daher die Bestimmung von s um $\beta\%$; gleiches gilt von einem Irrtum $\omega\%$ bei der Bestimmung von w.

31. Die analoge Aufgabe für die Formel $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, die bei kleiner Schwingungsweite (Amplitude) die Dauer der Schwingung eines *mathe-*

---

1) Vgl. „Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher", hrsgg. von C. A. F. Peters, Bd. 4, S. 310, Altona 1862 (Brief von Gauß an Schumacher vom 26. September 1844). *Gauß* hält die oben stehende Form der Fundamentalformeln und der zugehörigen Gleichungen zwischen den Differentialen für die beste.

matischen Pendels von der Länge l aus einer extremen Lage in die nächste extreme Lage angibt; g ist die Beschleunigung der Schwere.

$$df = \left|\frac{\partial t}{\partial l} dl\right| + \left|\frac{\partial t}{\partial g} dg\right| = \left|\frac{\pi}{2\sqrt{lg}} dl\right| + \left|\frac{\pi \sqrt{l}}{2g\sqrt{g}} dg\right|,$$

daher

$$\frac{df}{t} = \left|\frac{1}{2}\frac{dl}{l}\right| + \left|\frac{1}{2}\frac{dg}{g}\right|.$$

Ein Fehler bei der Bestimmung von l bzw. g, der λ bzw. $\gamma\,\%$ beträgt, beeinflußt daher die Bestimmung von t im Betrage von $\frac{1}{2}\lambda\,\%$ bzw. $\frac{1}{2}\gamma\,\%$.

32. Nach dem *Snellius*schen Brechungsgesetz (vgl. S. 11, Aufg. 25) ist $\sin\varepsilon = n \sin\beta$. Man zeige nun, daß Lichtstrahlen von verschiedenen Wellenlängen und also auch verschiedenen Brechungsindizes (n bzw. $n + dn$), die unter demselben Winkel ε einfallen, durch die Brechung in Richtungen abgelenkt werden, die von einander um $d\beta = -\frac{1}{n}\operatorname{tg}\beta \cdot dn$ abweichen.

Aus $\sin\varepsilon = n \sin\beta$ folgt $n \cos\beta \cdot d\beta + \sin\beta \cdot dn = 0$.

33. Die *Messung der Stromstärke J eines galvanischen Stromes* mit Hilfe der *Tangentenbussole* gründet sich auf die Formel $J = c \operatorname{tg}\alpha$, wo α den Ablenkungswinkel der Nadel, c eine vom jeweiligen Apparat abhängige Konstante, den sogenannten *Reduktionsfaktor*, bedeutet. In welcher Weise beeinflußt ein bei der Ablesung des Winkels α begangener Fehler $d\alpha$ die Angabe der Stromstärke J?

$$dJ = \frac{c \cdot d\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad \frac{dJ}{J} = \frac{d\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{2\,d\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Ablenkungswinkel α von ungefähr 45^0 sind daher für die Genauigkeit der Messung besonders günstig.

34. Beispiel zu Aufg. 33: Die Unsicherheit der Ablesung betrage $\pm 2'$ oder in Bogenmaß $\pm \frac{2 \cdot 60}{206\,264{,}8}$, also etwa $\pm \frac{1}{1720}$, α sei der Reihe nach gleich 5^0, 30^0, 40^0, 45^0.

Hier wird $\frac{dJ}{J} = \pm \frac{1}{860 \sin 2\alpha}$, und mit den angegebenen Werten von α erhält man für $\frac{dJ}{J}$ der Reihe nach $\pm \frac{1}{149}$, $\pm \frac{1}{745}$, $\pm \frac{1}{847}$, $\pm \frac{1}{860}$.

35. Bei der Vergleichung der Intensitäten zweier Lichtquellen mit Hilfe des *Fettfleckphotometers* von *Bunsen* wird ein mit einem kreisrunden oder ringförmigen, scharf begrenzten Fettfleck versehener weißer Papierschirm auf einer mindestens 2 m langen Gleitbahn oder Bank verschoben, bis die an den Enden der Bank befindlichen, zu vergleichenden Lichtquellen den Fleck gleich stark beleuchten. Dies ist der Fall, wenn der Fleck scheinbar verschwindet. Sind i_1 und i_2 die Intensitäten der beiden Lichtquellen, a_1 und a_2 ihre Abstände von

dem Papierschirm, so ist alsdann $i_1 : i_2 = a_1^2 : a_2^2$. Es werde nun angenommen, daß die Länge $a_1 + a_2 = a$ der Photometerbank sowie die Intensität i_1 der einen Lichtquelle genau bekannt sei. Wie groß ist dann der relative Fehler $\frac{di_2}{i_2}$, den man bei der Angabe der Lichtstärke i_2 macht, wenn bei der Messung des Abstandes a_2 ein kleiner Fehler da_2 gemacht wird?

Man hat $i_2 = \frac{a_2^2 i_1}{a_1^2} = \frac{a_2^2 i_1}{(a - a_2)^2}$; hieraus folgt $di_2 = \frac{2 a a_2 i_1}{(a - a_2)^3} da_2$ und $\frac{di_2}{i_2} = \frac{2a}{a_2(a - a_2)} da_2$.

36. Es sei v das Volumen, das die Masseneinheit eines unter dem Druck p befindlichen Gases einnimmt, R die der Dichtigkeit oder dem Molekulargewicht proportionale Gaskonstante, T die absolute Temperatur, d. h. die vom sogenannten absoluten Nullpunkt (-273^0 C) an gezählte Temperatur. Alsdann heißt ein Gas ein *ideales Gas*, falls es das *Mariotte-Gay-Lussac*sche Gesetz befolgt, das die Formel $pv = RT$ zum mathematischen Ausdruck hat. Wird p in Kilogrammen, v in Kubikmetern angegeben, so ist für Luft $R = 29{,}27$. (Zur Bestimmung der Gaskonstanten R wendet man die Formel $pv = RT$ auf einen bestimmten Zustand p_0, v_0, T_0 an. Für trockene Luft ist nun bei einer Temperatur von 0^0 C oder $T_0 = 273^0$ und bei einem Druck $p_0 = 10333$ kg/qm das spezifische Gewicht $d_0 = 1{,}293$ (kg/cbm), daher

$$v_0 = \frac{1}{d_0} = 0{,}7734 \text{ und } R = \frac{p_0 v_0}{T_0} = \frac{10\,333 \cdot 0{,}7734}{273} = 29{,}27).$$

Man leite aus der Formel $pv = RT$ die bei konstantem Druck bzw. bei konstantem Volumen bestehenden Gleichungen

$$\frac{dv}{v} = \frac{dT}{T} \text{ und } \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T}$$

ab, die von R ganz unabhängig sind.

$p \cdot dv + v \cdot dp = R \cdot dT$. Bei konstantem Druck ist $dp = 0$, bei konstantem Volumen $dv = 0$.

37. Die einem Körper zugeführte Wärmemenge dQ bewirkt zum Teil eine Erhöhung der lebendigen Kraft der Moleküle, d. h. eine Erhöhung der Temperatur des Körpers, zum Teil dient sie zur Überwindung der Kohäsion der Moleküle (Leistung innerer Arbeit), endlich dient sie zur Leistung äußerer Arbeit, z. B. zur Überwindung eines Druckes. Fassen wir die beiden ersten Teile in einem Ausdruck dU zusammen (Änderung der inneren Energie) und nennen den letztgenannten Teil dL, so ist $dU + dL$ proportional dQ, etwa gleich $W \cdot dQ$, und die hier auftretende Proportionalitätskonstante W ist die Anzahl Kilogrammmeter, die von einer Wärmeeinheit, einer „großen Kalorie" (Wärmemenge, die ein Kilogramm *Wasser* von $14\frac{1}{2}^0$ auf $15\frac{1}{2}^0$ erwärmt) ge-

leistet werden. Man findet W gleich etwa 427 Kilogrammeter. Durch Einführung von $A = \frac{1}{W} = \frac{1}{427}$ ergibt sich in Kalorien $dQ = A(dU + dL)$, die Formel für den sogenannten *ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.*

Wenn die äußere Arbeit dL darin besteht, daß bei einem Druck p eine Volumänderung dv hervorgebracht wird, ist $dL = p \cdot dv$ und $dQ = A(dU + pdv)$. Man hat nun experimentell festgestellt, daß bei idealen Gasen die innere Energie U nur von der Temperatur T abhängt,[1]) es ist $dU = \frac{dU}{dT} dT$, somit wird $dQ = A\left(\frac{dU}{dT} dT + pdv\right)$. Hier ist $A \frac{dU}{dT}$ die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, also die bei einem Kilogramm des Gases eine Temperaturerhöhung um 1^0 bewirkende Wärmemenge, falls die Erwärmung des Gases bei konstantem Volumen erfolgt. Mit Benutzung der Bezeichnungsweise $A \frac{dU}{dT} = c_v$ erhält man

$$dQ = c_v \cdot dT + Ap \cdot dv.$$

Die unter konstantem Druck bei einem Kilogramm des Gases eine Temperaturerhöhung um 1^0 bewirkende Wärmemenge ist die spezifische Wärme c_p bei konstantem Druck.

Man zeige nun mit Hilfe der Formel $pv = RT$ des *Mariotte-Gay-Lussac*schen Gesetzes, daß bei idealen Gasen die Gleichung stattfindet:

$$c_p - c_v = AR.$$

Es ist $dQ = c_v \cdot dT + Ap \cdot dv$, $p \cdot dv + v \cdot dp = R \cdot dT$, somit

$$dQ = (c_v + AR) dT - Av \cdot dp.$$

Da im Fall $dp = 0$ die Größe dQ gleich $c_p \cdot dT$ wird, hat man $c_v + AR = c_p$.

Daß $c_p - c_v > 0$ ist, war zu erwarten. Denn bei konstantem Volumen dient die zugeführte Wärmemenge nur zur Temperaturerhöhung, während sie bei konstantem Druck auch zur Überwindung dieses Druckes bei der Ausdehnung gebraucht wird. Daher muß $c_p > c_v$ sein. Für atmosphärische Luft ist

$$c_p = 0{,}237, \; c_v = 0{,}168, \; c_p : c_v = \varkappa = 1{,}410.$$

38. Man zeige, daß die Gleichung $dQ = c_v \cdot dT + Ap \cdot dv$ mit Hilfe von $pv = RT$ und $c_p - c_v = AR$ (vgl. Aufg. 36 und 37) in die Form

$$dQ = \frac{1}{R}(c_v \cdot v \cdot dp + c_p \cdot p \cdot dv)$$

1) Allgemein ist eigentlich U eine Funktion von p, v und T. Da nun zwischen p, v und T eine Gleichung, die Zustandsgleichung besteht, kann man z. B. p aus U eliminieren und U wäre dann nur noch Funktion von v und T; bei idealen Gasen fehlt aber auch v in dieser Funktion.

gebracht werden kann sowie in die Formen

$$dQ = c_v \cdot dT + \frac{ART}{v} dv, \quad dQ = c_p \cdot dT - \frac{ART}{p} dp$$

und

$$dQ = \frac{A}{\varkappa - 1}(v \cdot dp + \varkappa p \cdot dv).$$

Folgt unter Benutzung von $p \,.\, dv + v \cdot dp = R \cdot dT$.

39. Ein Gas möge sich der Formel $pv^n =$ konst. entsprechend ausdehnen. Man zeige alsdann, daß die zur Herbeiführung einer Volumänderung dv erforderliche Wärmemenge dQ gleich $\frac{A(\varkappa - n)}{\varkappa - 1} p \cdot dv$ ist.

Folgt leicht mit Hilfe der Formel $dQ = \frac{A}{\varkappa - 1}(v \cdot dp + \varkappa p \cdot dv)$ in Aufg. 38.

§ 6.

Unentwickelte oder implizite Funktionen. Zwei Veränderliche als Funktionen eines Parameters.

1. Sind x und y durch eine Gleichung $f(x, y) = 0$ verbunden, die nach keiner der beiden Veränderlichen aufgelöst ist, so sagt man, daß die eine Veränderliche, z. B. y, eine unentwickelte oder implizite Funktion der anderen, x, ist. Für die beiden ersten Ableitungen von y nach x bestehen die Formeln:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1}{f_2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2}{f_2^3},$$

wo der Index 1 jedesmal eine partielle Ableitung der Funktion $f(x, y)$ nach x, der Index 2 eine solche nach y andeutet. Es ist also z. B. $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}$. In der Formel für $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist vorausgesetzt, daß $f_{12} = f_{21}$ sei, daß also die Funktion $f(x, y)$ an der Stelle x, y stetig sei und daselbst stetige Ableitungen f_1, f_2, f_{12} habe (vgl. S. 22, Regel 3).

2. Sind drei Veränderliche x, y, z durch eine unentwickelte Gleichung $f(x, y, z) = 0$ verbunden, so ist z eine unentwickelte Funktion von x und y mit den partiellen Abteilungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_1}{f_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_2}{f_3}, \text{ wobei } f_3 = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

3. Zwei Veränderliche x und y können auch dadurch in Abhängigkeit von einander stehen, daß sie Funktionen einer dritten, unabhängigen Veränderlichen t, eines sogenannten Parameters, sind: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Die Elimination von t aus beiden Gleichungen würde eine Gleichung $f(x, y) = 0$ liefern. Wird diese Elimination nicht vollzogen, so bestehen für die beiden ersten Ableitungen die Formeln:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t) \cdot \psi''(t) - \psi'(t) \cdot \varphi''(t)}{\varphi'(t)^3}.$$

Beispiele.

1. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by+d}{bx+cy+e}.$

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$

3. $a^2x^2 + b^2y^2 - (cx+d)^2 = 0,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{c(cx+d) - a^2x}{b^2y}.$

4. $a\sin^2 x + b\sin^2 y = 0,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{a\sin 2x}{b\sin 2y}.$

5. $y\sin x - x\cos y = 0,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos y - y\cos x}{\sin x + x\sin y}.$

6. $\cos(x+y) - xy = 0,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x+y)+y}{\sin(x+y)+x}.$

7. $ax + by + c\cdot e^{xy} = 0,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{a+cye^{xy}}{b+cxe^{xy}} = -\frac{a-y(ax+by)}{b-x(ax+by)}.$

8. Im Punkt $x = 2$, $y = 1$ der Kurve

$$x^3 - 7x^2y - 5y^3 + 4x^2 - 10xy + 8x - 5y + 18 = 0$$

die Steigung zu bestimmen.

Hier wird $f_1 = -2$, $f_2 = -68$, daher $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{34}$. Vor der Berechnung von f_1 und f_2 wird man übrigens nachsehen, ob der Punkt $x = 2$, $y = 1$ wirklich der Kurve angehört.

9. Man zeige, daß für die implizite Funktion $e^{ax+by} - c = 0$ die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ konstant ist, ohne daß man $\frac{dy}{dx}$ wirklich bildet.

Die Gleichung läßt sich in der Form $ax + by - \ln c = 0$ schreiben und stellt daher eine Gerade dar.

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}.$
(Ellipsoid)

11. $e^z\cos x - \cos y = 0,$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} x, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\operatorname{tg} y.$
(Scherksche Minimalfläche)

12. Für den Punkt $x = 2$, $y = -1$ der Kurve $4x^2 - 2xy - 5y^2 - 6x - 4y - 7 = 0$ die zweite Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu bilden.

Man findet

$$f_1 = 12,\ f_2 = 2,\ f_{11} = 8,\ f_{12} = -2,\ f_{22} = -10,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 164.$$

Gehört der Punkt wirklich der Kurve an?

13. Die gleiche Aufgabe für den Punkt $x = 0$, $y = 0$ der Kurve $\sin x + \sin y - xy = 0$.

Hier wird

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_{11} = 0,\ f_{12} = -1,\ f_{22} = 0,\ \frac{d^2y}{dx^2} = -2.$$

14. $x = a\cos t,\ y = b\sin t,$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b\cot t}{a}.$
(Ellipse)

15. $x = \dfrac{a}{\cos t},\ y = b\,\mathrm{tg}\,t,$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a\sin t}.$
(Hyperbel)

16. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t),$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \cot\dfrac{t}{2}.$
(Gemeine Zykloide)

17. $x = k\cos^2 t,\ y = m\sin 2t,$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2m}{k}\cot 2t.$
(Ellipse)

18. $x = \dfrac{c\sin t}{a + b\cos t},\ y = \dfrac{e\cos t}{a + b\cos t},$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ae\sin t}{c(a\cos t + b)}.$

Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $a^2 >$ oder $< b^2$.

19. $x = a\cos^2 t,\ y = b\sin^2 t,$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}.$

Aus welchem inneren Grund ist hier $\dfrac{dy}{dx}$ von t unabhängig, also konstant?

20. Unter welchen Winkeln α erfolgen die Schnitte der Archimedischen Spirale $r = at$ mit der Polarachse (x-Achse)? Vgl. Fig. 10.

Die Parameterdarstellung der Kurve ist $x = at\cos t,\ y = at\sin t,$ $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t},$ also unabhängig von a. Für $t = 2k\pi$ (k ganze positive Zahl, Schnitte mit der positiven x-Achse) wird $\mathrm{tg}\,\alpha = 2k\pi$, für $t = (2k+1)\pi$ (Schnitte mit der negativen x-Achse) wird $\mathrm{tg}\,\alpha = (2k+1)\pi$. Erst für $k = \infty$ wird α ein rechter Winkel.

Für den zu den Werten $t = -2k\pi$ bzw. $t = -(2k+1)\pi$ gehörigen Teil der Spirale erhält man

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -2k\pi \text{ bzw. } -(2k+1)\pi.$$

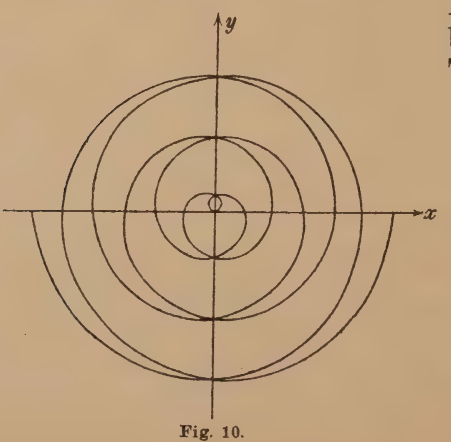


Fig. 10.

Fig. 11.

21. Die gleiche Aufgabe für die logarithmische Spirale $r = a^t$. Vgl. Fig. 11.

Man findet allgemein $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos t + \sin t \cdot \ln a}{-\sin t + \cos t \cdot \ln a}$. Sowohl für $t = \pm 2k\pi$ als für $t = \pm (2k+1)\pi$ wird $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\ln a}$, also konstant. Bei der logarithmischen Spirale erfolgen überhaupt *sämtliche* Schnitte mit *allen* durch ihren Anfangspunkt gezogenen Geraden unter einem und demselben Winkel α, für den $\cot \alpha = \ln a$ ist (vgl. S. 54, Aufg. 31).

22. Man bilde $\frac{d^3y}{dx^3}$, falls $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ist.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{\varphi'(\varphi'\psi''' - \psi'\varphi''') - 3\varphi''(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')}{\varphi'^5}.$$

23. Zu zeigen, daß die beiden Gleichungen $f(x, y, z) = 0$ und $g(x, y, z) = 0$, wenn sie zusammen y und z als Funktionen von x definieren, für die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ die Ausdrücke liefern:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_3 g_1 - f_1 g_3}{f_2 g_3 - f_3 g_2}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{f_2 g_3 - f_3 g_2}.$$

Die Gleichungen $f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = 0$ und $g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz = 0$ werden nach Division mit dx als Gleichungen mit den beiden Unbekannten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ aufgefaßt und nach diesen aufgelöst.

Die Ausdrücke $f_1 g_2 - f_2 g_1 = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}$, $f_2 g_3 - f_3 g_2 = \begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ g_2 & g_3 \end{vmatrix}$ und $f_3 g_1 - f_1 g_3 = \begin{vmatrix} f_3 & f_1 \\ g_3 & g_1 \end{vmatrix}$ heißen die *Funktionaldeterminanten* von f und g hinsichtlich x, y bzw. y, z bzw. z, x. Man bezeichnet sie auch symbolisch so:

$$\begin{pmatrix} f & g \\ x & y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & g \\ y & z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & g \\ z & x \end{pmatrix}.$$

§ 7.

Einführung von neuen Veränderlichen.

Beispiele.

1. Eine Kurve habe in Polarkoordinaten die Gleichung $f(r, \vartheta) = 0$, die rechtwinkligen Koordinaten eines ihrer Punkte seien $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$. Wie drückt sich $\frac{dy}{dx}$ durch r, ϑ und die partiellen Ableitungen von $f(r, \vartheta)$ aus?

Zunächst wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\vartheta \cdot dr + r\cos\vartheta \cdot d\vartheta}{\cos\vartheta \cdot dr - r\sin\vartheta \cdot d\vartheta};$$

bei Einführung von $\frac{dr}{d\vartheta} = -f'(\vartheta) : f'(r)$ erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\vartheta)\sin\vartheta - rf'(r)\cos\vartheta}{f'(\vartheta)\cos\vartheta + rf'(r)\sin\vartheta}.$$

2. Eine Kurve habe in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung $f(x, y) = 0$, die Polarkoordinaten eines ihrer Punkte seien $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$, $\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$, wobei $\cos\vartheta = \frac{x}{r}$, $\sin\vartheta = \frac{y}{r}$ ist. Wie drückt sich $\frac{dr}{d\vartheta}$ durch x, y und die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ aus?

Zunächst wird

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} : \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2};$$

bei Einführung von $\frac{dy}{dx} = -f_1 : f_2$ erhält man

$$\frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{xf_2 - yf_1}{xf_1 + yf_2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. In welche Gleichung geht die „Differentialgleichung zweiter Ordnung"

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

über, wenn an Stelle von x die Größe t durch $x = \cos t$ als unabhängige Veränderliche eingeführt wird?[1])

Hier wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{dt} : \sin t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\sin t \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \cos t \cdot \frac{dy}{dt}\right) : \sin^3 t,$$

man erhält

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0$$

4. Führt man in die Funktion $V = f(r)$ an Stelle von r den Ausdruck $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ein, so wird

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r}f'(r).\text{[2])}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f''(r)\cdot\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{r - x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = f''(r)\frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{x^2}{r^3}f'(r),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f''(r)\frac{y^2}{r^2} + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{y^2}{r^3}f'(r).$$

Addition ergibt den Beweis.

1) Vgl. É. Goursat „Cours d'analyse mathématique", Paris 1902, S. 72.
2) Zu der Abkürzung ΔV vgl. S. 25 und 26, Aufg. 7 bzw. 8.

5. Führt man $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ in $V = f(r)$ ein, so wird

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).$$

Folgt ähnlich wie zuvor.

6. Zu zeigen, daß der Ausdruck $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$, wo $V = f(x, y)$, bei Einführung von Polarkoordinaten r, ϑ durch $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ übergeht in

$$f'^2(r) + \frac{1}{r^2} f'^2(\vartheta).$$

Hier wird

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} + f'(\vartheta)\frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \text{ wobei } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\vartheta,\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{\sin\vartheta}{r};$$

analog bildet man $\frac{\partial V}{\partial y} = f'(r)\sin\vartheta + f'(\vartheta)\cdot\frac{\cos\vartheta}{r}$.

7. Zu zeigen, daß sich $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ bei der gleichen Substitution verwandelt in

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}.$$

Hier wird

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V_1}{\partial r}\cos\vartheta - \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta}\frac{\sin\vartheta}{r},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial V_2}{\partial r}\sin\vartheta + \frac{\partial V_2}{\partial \vartheta}\frac{\cos\vartheta}{r},$$

wobei $V_1 = \frac{\partial V}{\partial x}$, $V_2 = \frac{\partial V}{\partial y}$ ist. Mit Rücksicht auf die in der Lösung von Aufg. 6 gegebenen Ausdrücke für V_1 und V_2 erhält man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \left(\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)\left[f'(r)\cos\vartheta - f'(\vartheta)\frac{\sin\vartheta}{r}\right],$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)\left[f'(r)\sin\vartheta + f'(\vartheta)\frac{\cos\vartheta}{r}\right],$$

woraus leicht die zu beweisende Gleichung folgt.

8. In welchen Ausdruck verwandelt sich $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, wenn in die Funktion $V(x, y, z)$ an Stelle von x, y, z räumliche Polarkoordinaten eingeführt werden durch

$$x = r\sin\psi\cos\vartheta,\quad y = r\sin\psi\sin\vartheta,\quad z = r\cos\psi?$$

Kann mit Hilfe des Ergebnisses der vorhergehenden Aufgabe abgeleitet werden, indem durch die Substitution $r\sin\psi = \varrho$ die Ausdrücke für x und y übergehen in $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$. Daher wird

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}.$$

Aus $\varrho = r\sin\psi$ und $z = r\cos\psi$ ergibt sich in gleicher Weise

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2},$$

folglich

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}.$$

Hier ist

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \varrho} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = \frac{\partial V}{\partial r}\sin\psi + \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\cos^2\psi}{z},$$

denn

$$r^2 = \varrho^2 + z^2 \text{ liefert } \frac{\partial r}{\partial \varrho} = \frac{\varrho}{r} = \sin\psi$$

und

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\varrho}{z} \text{ liefert } \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = \frac{\cos^2\psi}{z}.$$

Man erhält also

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\cos^2\psi}{z\sin\psi} + \frac{1}{r^2\sin^2\psi}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\psi}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cot\psi}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \psi}.$$

9. Wie drücken sich die Ableitungen y', y'', y''' einer Funktion $y = f(x)$ durch die Ableitungen $\frac{dx}{dy} = x'$, $\frac{d^2x}{dy^2} = x''$, $\frac{d^3x}{dy^3} = x'''$ der *inversen Funktion* aus? Die inverse Funktion $x = \varphi(y)$ ist hierbei diejenige, die sich durch Auflösung von $y = f(x)$ nach x ergibt. So ist z. B. $x = \arcsin y$ die inverse Funktion zu $y = \sin x$.

Man findet leicht $y' = \frac{1}{x'}$, $y'' = -\frac{x''}{x'^3}$, $y''' = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}$.

10. Zu zeigen, daß die „Schwarzsche Differentialinvariante“[1])

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2,$$

in der y', y'', y''' Ableitungen einer Funktion $y = f(x)$ sind, unverändert bleibt, wenn man y durch $\frac{az+b}{cz+d}$ ersetzt.

Im folgenden mögen durch Akzente Differentiationen nach x angedeutet sein. Alsdann ist $y' = \frac{dy}{dz}z' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}z'$,

$$\frac{y''}{ad-bc} = \frac{(cz+d)z'' - 2cz'^2}{(cz+d)^3}, \quad \frac{y'''}{y'} = \frac{(cz+d)^2 z''' - 6c(cz+d)z'z'' + 6c^2z'^3}{(cz+d)^2\cdot z'},$$

und es wird $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$.

Setzt man übrigens $\frac{y''}{y'} = p$, so geht $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$ in $p' - \frac{1}{2}p^2$ über.

---

1) H. A. Schwarz, Journal für die reine und angew. Mathematik Bd. 70, S. 116 (1869) = „Ges. math. Abhandlungen“, Bd. 2, Berlin 1890, S. 78 und 352ff., ferner A. Cayley, Trans. Cambridge Phil. Soc. Bd. 13, Teil 1 (1881), S. 5—68 = Coll. papers Bd. 11, S. 148—216. Im wesentlichen kommt der Ausdruck, wenn auch nicht in völlig ausgerechneter Form, schon bei Lagrange vor, vgl. Nouv. Mém. de l'Acad. roy. de Berlin, année 1779, S. 175 = Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 55, hrsgg. von A. Wangerin, S. 18 und 89f.

11. Wird in der *Schwarzschen Differentialinvariante* x durch $\frac{az+b}{cz+d}$ ersetzt, so findet die Beziehung statt:[1])

$$\frac{\frac{d^3y}{dz^3}}{\frac{dy}{dz}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\frac{dy}{dz}}\right)^2 = \frac{(ad-bc)^2}{(cz+d)^4}\left(\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2\right).$$

Hierbei deuten die Akzente wieder Differentiationen nach x an.

Wird in ähnlicher Weise abgeleitet wie die Lösung von Aufg. 10. Man findet:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}y', \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^4}\left\{(ad-bc)y'' - 2c(cz+d)y'\right\},$$

$$\frac{d^3y}{dz^3} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^6}\left\{(ad-bc)^2y''' - 6c(ad-bc)(cz+d)y'' + 6c^2(cz+d)^2y'\right\},$$

woraus die zu beweisende Beziehung leicht folgt.

12. Man zeige, daß die *Schwarzsche Differentialinvariante*

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 \text{ in } -\frac{1}{x'^2}\left\{\frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2\right\}$$

übergeht, wenn an Stelle der nach x genommenen Ableitungen y', y'', y''' die Ableitungen $x' = \frac{dx}{dy}$, $x'' = \frac{d^2x}{dy^2}$, $x''' = \frac{d^3x}{dy^3}$ eingeführt werden.[2])

Zum Beweis benutzt man das Ergebnis von Aufg. 9, S. 42. Die zu beweisende Gleichheit läßt sich übrigens auch in die Gestalt bringen:

$$2y'y''' - 3y''^2 = -\frac{2x'x''' - 3x''^2}{x'^6}.$$

Ferner werde bemerkt, daß sich die Gleichung $2y'y''' - 3y''^2 = 0$ ergibt, wenn man die Gleichung $xy + ax + by + c = 0$ einer Hyperbel, deren Asymptoten den Koordinatenachsen parallel sind, dreimal nach x differenziert und aus den drei so entstehenden Gleichungen und aus $xy + ax + by + c = 0$ die Größen a, b, c eliminiert. Man erhält hierdurch $2y'y''' - 3y''^2 = 0$, und dies ist die „Differentialgleichung dritter Ordnung", der sämtliche Hyperbeln der genannten Beschaffenheit genügen.

13. In gleicher Weise wie bei Aufg. 12 ist zu zeigen, daß der Ausdruck $\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$ *völlig* unverändert bleibt, wenn man an Stelle der y', y'' die Ableitungen x', x'' einsetzt.[3])

---

1) Vgl. F. Klein, „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade", Leipzig 1884, S. 75.

2) J. J. Sylvester, Comptes Rendus, Bd. 101, S. 1042f. (1885) und American Journ. of Math., Bd. 8, S. 197—203 (1886). Funktionen der obigen Art, die sich also bei Vertauschung von y und x bis auf einen in den x', x'', x''', ... rationalen Faktor wieder reproduzieren, hat Sylvester *Reziprokanten* genannt.

3) Dieser Ausdruck ist eine *absolute Reziprokante*. Er bedeutet geometrisch

§ 8.

Tangente und Normale bei ebenen Kurven, Tangentenebene und Normale bei Flächen.

1. Die Gleichung der im Punkt $P(x, y)$ einer ebenen Kurve gezogenen Tangente ist, wenn ξ, η laufende Koordinaten bedeuten:

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{dy}{dx},$$

die Gleichung der Normale ist $\frac{\eta - y}{\xi - x} = -1 : \frac{dy}{dx}$.

1a. Liegt die Gleichung der Kurve in der Form $y = f(x)$ vor, so wird $\frac{dy}{dx} = y'$.

1b. Liegt die Gleichung der Kurve in der Form $f(x, y) = 0$ vor, so ist $\frac{dy}{dx} = -f_1 : f_2$,

die Gleichung der Tangente wird $(\xi - x)f_1 + (\eta - y)f_2 = 0$,

die Gleichung der Normale wird $(\xi - x)f_2 - (\eta - y)f_1 = 0$.

Liegt insbesondere eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung vor und bringt man ihre Gleichung in die homogene Form $f(x, y, z) = 0$, indem man x und y durch $x : z$ und $y : z$ ersetzt und die Nenner mit z entfernt, so lautet die Gleichung der Tangente in homogener Gestalt

$$\xi f_1 + \eta f_2 + \zeta f_3 = 0,$$

wo f_3 die partielle Ableitung von $f(x, y, z)$ nach z bedeutet.

1c. Ist die Kurve durch eine Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben, so erhält man

als Gleichung der Tangente: $(\xi - x)\psi'(t) - (\eta - y)\varphi'(t) = 0$,

als Gleichung der Normale: $(\xi - x)\varphi'(t) + (\eta - y)\psi'(t) = 0$.

2. Werden die Koordinaten eines *nicht* auf der Kurve $f(x, y) = 0$ gelegenen Punktes in $f(x, y)$ eingesetzt, so wird dieser Ausdruck entweder positiv oder negativ: die Kurve teilt die Ebene in solche Gebiete, für deren Punkte $f(x, y)$ positiv wird, und solche Gebiete, für die $f(x, y)$ negativ wird. Bei der Ellipse $f(x, y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ wird z. B. $f(x, y)$ für im Inneren gelegene Punkte negativ, für äußere Punkte positiv, und dieses Verhalten kehrt sich um, wenn $f(x, y)$ mit $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ identifiziert wird. Bei der Lemniskate $f(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^2$

---

das Quadrat des zum Punkt x, y der Kurve $y = f(x)$ gehörigen Krümmungsradius. Vgl. § 18, Regel 2.

$-2c^2(x^2-y^2)=0$ (vgl. Fig. 16, S. 54) ist $f(x, y)$ negativ für Punkte, die von einem der beiden Ovale der Kurve umschlossen werden, positiv im äußeren Gebiete. Ähnliche Betrachtungen kann man bei Flächen $f(x, y, z)=0$ anstellen.

3. Für den Winkel β, den die im Punkt P der Kurve $f(x, y)=0$ gezogene *Normale* mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, gelten die Formeln:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{f_2}{f_1},\quad \cos\beta=\frac{f_1}{\pm\sqrt{f_1^2+f_2^2}},\quad \sin\beta=\frac{f_2}{\pm\sqrt{f_1^2+f_2^2}},$$

und hier ist bei $\pm\sqrt{f_1^2+f_2^2}$ das Plus- oder Minuszeichen zu setzen, je nachdem man die Richtung der von P aus sich in das positive oder in das negative Gebiet der Ebene erstreckenden Normale haben will.[1]) Hiermit ist auch die eine oder die entgegengesetzte Richtung der in P gezogenen *Tangente* festgelegt, wenn man verabredet, daß die Tangente zur Normale stets so liegen soll wie die positive x-Achse zur positiven y-Achse. Es kann alsdann in den vorstehenden Formeln stets $\beta=\alpha+\frac{1}{2}\pi$ gesetzt werden, wo α den Winkel der positiven Richtung der Tangente mit der positiven Richtung der x-Achse bezeichnet.

Auch bei Kurven mit der Gleichung $y=f(x)$ sind diese Kriterien anzuwenden, an Stelle von $f(x, y)$ hat nur $f(x)-y$ zu treten; f_1 ist alsdann gleich $f'(x)$ oder y', $f_2=-1$.

Ist eine Kurve durch eine Parameterdarstellung $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ gegeben, so gelten für den Winkel α, den die im Punkt P mit dem Parameter t gezogene *Tangente* mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, die Formeln:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\quad \cos\alpha=\frac{\varphi'(t)}{\pm\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}},\quad \sin\alpha=\frac{\psi'(t)}{\pm\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}},$$

und hier ist bei der Quadratwurzel das Plus- oder Minuszeichen zu setzen, je nachdem die Tangente im Sinn des wachsenden t (d. h. in der Richtung, in der der Parameter t beim Fortschreiten auf der Kurve von P aus wächst) gezogen ist oder im entgegengesetzten Sinn. Hiermit ist auch die eine oder die entgegengesetzte Richtung der durch P gezogenen *Normale* der Kurve festgelegt, wenn man wieder verabredet, daß die Normale zur Tangente so liegen soll wie die positive y-Achse zur positiven x-Achse. Man hat dann in den vorstehenden Formeln $\alpha=\beta-\frac{1}{2}\pi$ zu setzen, wo β den Winkel der

1) Vgl. Gauß „Disquisitiones generales circa superficies curvas, Bd. 6, S. 106 der Commentationes soc. reg. scient. Gottingensis recentiores (1828) = Werke Bd. 4, S. 225; eine von A. Wangerin besorgte deutsche Ausgabe dieser Schrift findet sich in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften, vgl. daselbst Nr. 5, S. 10.

positiven Richtung der Normale mit der positiven Richtung der x-Achse bedeutet.[1])

Auch bei Kurven mit der Gleichung $y = f(x)$ sind diese Kriterien anwendbar, sobald man $x = t$, $y = f(t)$ setzt.

4. Ist $r = f(\vartheta)$ die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten, so gelten für den Winkel γ, den die in einem beliebigen Kurvenpunkt P gezogene *Tangente* mit dem *Radiusvektor* OP von P bildet, die Formeln:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{r}{r'}, \quad \sin\gamma = \frac{r}{\pm\sqrt{r^2 + r'^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{r'}{\pm\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

wobei $r' = \frac{dr}{d\vartheta} = f'(\vartheta)$. Hier ist γ derjenige Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor, den die über P hinaus gezogene Verlängerung des Radiusvektors OP zu überstreichen hat, wenn man diese Verlängerung durch Drehung im Sinn der wachsenden Polarwinkel ϑ, also auf Grund der S. 2 getroffenen Verabredung durch Drehung in dem der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzten Sinn, in die Lage der Tangente überführen will. In den Formeln für $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$ hat man hierbei der Quadratwurzel das Plus- oder Minuszeichen zu geben, je nachdem $r = f(\vartheta)$ positiv oder negativ ist.

5. Die Tangentenebene des Punktes $P(x, y, z)$ der Fläche $f(x, y, z) = 0$ hat in laufenden Koordinaten ξ, η, ζ die Gleichung

$$(\xi - x)f_1 + (\eta - y)f_2 + (\zeta - z)f_3 = 0.$$

Die Normale dieses Punktes P hat die Gleichungen

$$\frac{\xi - x}{f_1} = \frac{\eta - y}{f_2} = \frac{\zeta - z}{f_3},$$

sie bildet daher mit den Koordinatenachsen Winkel α, β, γ, deren Kosinus die Werte haben

$$\cos\alpha = \frac{f_1}{\pm\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}}, \quad \cos\beta = \frac{f_2}{\pm\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{f_3}{\pm\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}}.$$

Hier ist der Quadratwurzel das Plus- oder Minuszeichen zu geben, je nachdem man die Richtung der von P aus sich in das positive oder in das negative Gebiet des Raumes erstreckenden Normale haben will.

Beispiele.

1. Wie lauten die Gleichungen der im Punkt $x = 2$, $y = -1$ gezogenen Tangente und Normale der Kurve $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 3$?

---

1) Diese Kriterien für die Richtungen der Tangenten und Normalen bei Kurven, die durch eine Parameterdarstellung gegeben sind, verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn S. Gundelfinger.

Für die Tangente findet man $7\xi - \eta - 15 = 0$, für die Normale $\xi + 7\eta + 5 = 0$.

2. Die gleiche Aufgabe für den Punkt $x = -2$, $y = 3$ der Kurve $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$.

Für die Tangente findet man $9\xi + 2\eta + 12 = 0$, für die Normale $2\xi - 9\eta + 31 = 0$.

3. Man bilde in homogenen Koordinaten die Gleichung der im Punkt x, y der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ gezogenen Tangente.

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} - \zeta = 0.$$

4. Wie lauten die Gleichungen von Tangente und Normale für den Punkt $t = 3$ der Kurve $x = 3t - 5$, $y = t^2 - 4$?

Für die Tangente findet man $2\xi - \eta - 3 = 0$, für die Normale $\xi + 2\eta - 14 = 0$.

5. Die gleiche Aufgabe für einen beliebigen Punkt t der Ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Die Gleichung der Tangente wird $b\xi \cos t + a\eta \sin t - ab = 0$, die Gleichung der Normale $a\xi \sin t - b\eta \cos t - (a^2 - b^2) \sin t \cos t = 0$.

6. Die gleiche Aufgabe für den Punkt $t = \frac{1}{2}\pi$ der Kurve $x = a \cos t + b \sin t$, $y = c \cos t + d \sin t$.

Für die Tangente findet man $c\xi - a\eta + ad - bc = 0$, für die Normale $a\xi + c\eta - ab - cd = 0$.

7. Wenn ein Kreis (Radius a) auf einer Geraden (x-Achse) rollt ohne zu gleiten, so beschreibt ein mit dem Kreis fest verbundener Punkt eine Kurve, die als *Zykloide* bezeichnet wird. Ihre Parameterdarstellung ist:

$$x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t,$$

wobei b den Abstand des die Kurve beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt des rollenden Kreises bezeichnet; t ist der Wälzungswinkel, d. h. der Zentriwinkel, der dem auf der x-Achse abgerollten Bogen des Kreises zugehört. Dabei ist diese Bogenlänge von derjenigen Anfangslage aus zu messen, bei der der Punkt P und der Mittelpunkt des rollenden Kreises auf der y-Achse liegen, insbesondere P die Ordinate $y = a - b$ hat. Der Wälzungswinkel kann daher absolut genommen größer sein als beliebige ganzzahlige Vielfache von 2π. Man zeige nun, daß die in einem Punkt der Kurve gezogene Normale durch den jeweiligen Berührungspunkt des rollenden Kreises mit der x-Achse hindurchgeht. Vgl. Fig. 35 und Aufg. 6, S. 98; die drei Kurven der Figur entsprechen den Fällen $b > a$, $b = a$ und $b < a$.

Die Gleichung der Normale ist

$$(\xi - at + b \sin t)(a - b \cos t) + (\eta - a + b \cos t)b \sin t = 0,$$

die Abszisse des genannten Berührungspunktes ist $\xi = at$, $\eta = 0$.

8. Wie lautet die Gleichung der zu der Geraden $x-3y-5=0$ parallelen Tangente der Parabel $y^2-4x=0$?

Einerseits ist $y'=\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$, andrerseits $2yy'=4$ oder $y'=2:y$; daher findet man $y=6$, $x=9$ als Koordinaten des Berührungspunktes und $\eta-6=\frac{1}{3}(\xi-9)$ oder $\xi-3\eta+9=0$ als Gleichung der Tangente.

9. Zu zeigen, daß die in einem beliebigen Punkt $P(x, y)$ der Kurve $y=cx^n$ gezogene Tangente auf der x-Achse ein Stück abschneidet, das gleich $\left(1-\frac{1}{n}\right)x$ ist.

Die Gleichung der Tangente ist $cnx^{n-1}\xi-\eta-(n-1)y=0$; für $\eta=0$ wird $\xi=\frac{n-1}{n}x$. — Man beachte die auf der Hand liegende Anwendung zur Konstruktion der Tangente des Punktes P.

10. Trifft die in einem beliebigen Punkt P der Kurve $x^m y^n-c=0$ gezogene Tangente die y-Achse in S, die x-Achse in T, so ist das Verhältnis $SP:PT$ konstant, nämlich gleich $m:n$. Je nachdem $m:n$ positiv oder negativ ist, liegt P zwischen S und T oder auf einer der beiden Verlängerungen der Strecke ST. Dies soll bewiesen werden. Vgl. Fig. 49, S. 119.

Die Gleichung der Tangente ist $(\xi-x)my+(\eta-y)nx=0$; für $\eta=0$ wird $\xi=\left(1+\frac{n}{m}\right)x$, und die Behauptung ist nun leicht zu beweisen.

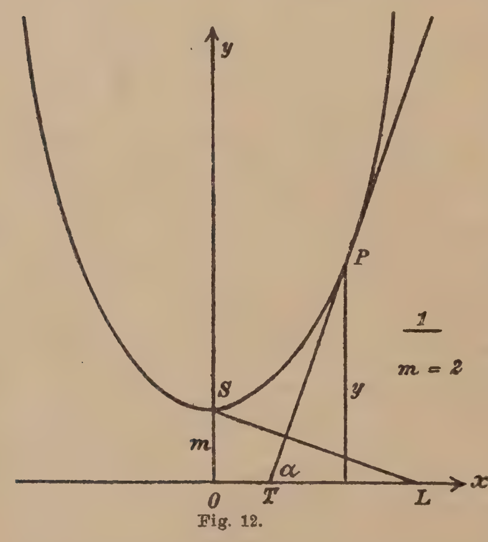


Fig. 12.

11. Zu zeigen, daß die Länge des vom Koordinatenanfang auf die Tangente des Punktes x, y der Kurve $f(x, y)=0$ gefällten Lotes gleich

$$\left|\frac{xf_1+yf_2}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}\right|$$

ist.

12. Die Richtigkeit folgender Konstruktion nachzuweisen: Soll in einem Punkt $P(x, y)$ einer Kettenlinie

$$y=\frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right)=m\operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right)$$

die Tangente konstruiert werden, so beschreibe man um den Scheitel S der Kurve mit der Ordinate von P als Radius einen Kreisbogen. Dieser schneidet die x-Achse in zwei Punkten. Derjenige von beiden, der mit P auf derselben Seite der y-Achse liegt (er heiße L), wird mit S verbunden (Fig. 12). Alsdann ist das von P auf SL gefällte

Lot PT die Tangente von P; eine durch P gezogene Senkrechte zu PT ist die Normale von P.

Auf Grund der Konstruktion ist $\sphericalangle OSL = \sphericalangle PTL$, $\operatorname{tg}(OSL) = OL : OS = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m}$; da man, am besten unter Benutzung der hyperbolischen Funktionen (vgl. S. 7, Aufg. 6), auch $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m}$ findet, ist tatsächlich $\sphericalangle PTL$ der Winkel α, den die Tangente von P mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt.

13. Welche Bedingung müssen die Koordinaten x, y eines Punktes P der Kurve $f(x, y) = 0$ erfüllen, wenn a) die in P gezogene Tangente oder b) die Normale von P durch den Koordinatenanfang gehen soll?

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

14. Bei der Kurve $xy^2 - c = 0$ diejenigen Punkte zu bestimmen, deren Normalen durch den Koordinatenanfang gehen.

Es muß $y^2 = 2x^2$ sein; man findet $x = \sqrt[3]{\frac{c}{2}}$, $y = \pm \sqrt[3]{\frac{c}{2}}\sqrt{2}$.

15. Welche Beziehung muß zwischen den Halbachsen a, b der Ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ und den Koeffizienten A, B, C der Gleichung einer Geraden $Ax + By + C = 0$ stattfinden, wenn die Gerade eine Normale der Ellipse sein soll?

Nach S. 47, Aufg. 5 findet man $A : B : C = a \sin t : -b \cos t : -(a^2 - b^2) \sin t \cos t$, woraus $(a^2 - b^2)^2 A^2 B^2 = C^2(A^2 b^2 + B^2 a^2)$ folgt.

16. In jedem Punkt der Parabel $y^2 - px = 0$ denke man sich die Tangente gezogen und das vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der x-Achse gemessene Stück derselben halbiert. Es soll gezeigt werden, daß diese Halbierungspunkte die Scheiteltangente der Parabel erfüllen.

Die Gleichung der Tangente ist $p\xi - 2y\eta + px = 0$, sie trifft die x-Achse im Punkt $\xi = -x$, der Ort der Halbierungspunkte ist daher $\xi = 0$. Hieraus ergibt sich zugleich folgende Konstruktion der Parabeltangente eines beliebigen Punktes P, wenn außer P noch der Scheitel O und dessen Tangente bekannt sind: Man fällt von P auf die Scheiteltangente das Lot PQ; die Verbindungslinie von P mit dem Mittelpunkt M der Strecke OQ ist die gewünschte Tangente (Fig. 13).

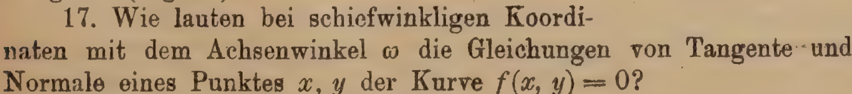


Fig. 13.

17. Wie lauten bei schiefwinkligen Koordinaten mit dem Achsenwinkel ω die Gleichungen von Tangente und Normale eines Punktes x, y der Kurve $f(x, y) = 0$?

Nach Aufg. 11, S. 4 findet man auch jetzt $\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{dy}{dx}$ als Gleichung der Tangente. Als Gleichung der Normale ergibt sich zunächst $\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{\sin\beta}{\sin(\omega - \beta)}$, wo β den Winkel bedeutet, den die Normale mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. Mit Rücksicht auf $\beta = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}$ findet man schließlich für die Normale die Gleichung

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = -\frac{1 + y'\cos\omega}{y' + \cos\omega}, \quad \text{wobei } y' = \frac{dy}{dx}.$$

18. Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, in denen die Schar von Kreisen $x^2 + y^2 - 2a\lambda x + \lambda^2 - b^2 = 0$ (a, b Konstanten, λ ein veränderlicher Parameter) durch Parallelen zur x-Achse berührt wird?

Der Ort ist ein Kegelschnitt $x^2(1 - a^2) + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, denn die Forderung $\frac{dy}{dx} = 0$ liefert $\lambda = \frac{x}{a}$. Je nachdem $a^2 < 1$, $= 1$, oder > 1 ist, wird der Kegelschnitt eine Ellipse, das Parallelenpaar $y^2 - b^2 = 0$ oder eine Hyperbel.

19. Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, in denen die Kurven der Schar von Parabeln $ay^2 - \lambda^2(x - \lambda) = 0$ durch Geraden berührt werden, die mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel von 45^0 bilden?

Man findet die Parabel $4x^2 + y^2 - 4xy - 8ay = 0$, denn die Forderung $\frac{dy}{dx} = 1$ liefert $\lambda^2 = 2ay$.

20. Gesucht wird der geometrische Ort aller Punkte, in denen die Kurven der Schar $y = \lambda x^n$ durch Geraden berührt werden, die mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel α bilden, für den $\operatorname{tg}\alpha = \varkappa$ ist.

Hier wird $\varkappa = \lambda n x^{n-1}$, man findet als Ort die durch den Koordinatenanfang gehende Gerade $y = \frac{\varkappa}{n} x$.

21. Die Fußpunkte der von einem beliebig, aber fest gewählten Punkt $P_1(x_1, y_1)$ nach der Kurve $y = cx^n$ gezogenen Normalen liegen auf einem von der Konstanten c unabhängigen Kegelschnitt.

Die Gleichung $\frac{\eta - y}{\xi - x} = -\frac{x}{ny}$ der in einem beliebigen Punkt der Kurve gezogenen Normale muß durch $\xi = x_1$, $\eta = y_1$ erfüllt werden. Die Fußpunkte liegen auf dem Kegelschnitt

$$x^2 + ny^2 - x_1 x - ny_1 y = 0, \quad \text{der in } x = \frac{x_1}{2}, \quad y = \frac{y_1}{2}$$

seinen Mittelpunkt hat; bei positivem n ist der Kegelschnitt eine Ellipse, bei negativem n eine Hyperbel.

22. Die gleiche Aufgabe mit Bezug auf die Kurve $y = \sin x$.

Man erhält die Kurve vierter Ordnung

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2(y^2 - 1) = 0,$$

die in $x = x_1$, $y = y_1$ sowie auf der x-Achse im Unendlichen Doppelpunkte (vgl. § 15, Nr. 1 und 2, S. 99 f.) besitzt. Die Berührungspunkte der von P_1 an die Kurve $y = \sin x$ zu ziehenden *Tangenten* liegen auf der Kurve vierter Ordnung

$$(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2(y^2 - 1) = 0.$$

23. Die Berührungspunkte der *Tangenten,* die man von einem festen Punkt $P_1(x_1, y_1)$ an eine logarithmische Spirale $r = a^t$ ziehen kann, liegen auf einem durch P_1 und durch den Pol O der Spirale gehenden Kreis. (Fig. 14). Vgl. auch Aufg. Nr. 17, S. 70.

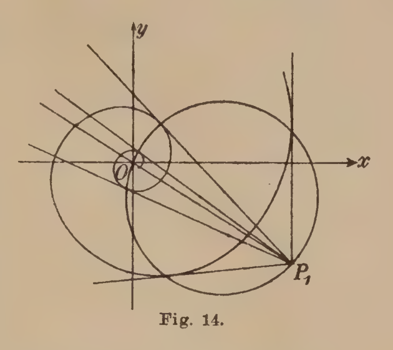


Fig. 14.

Setzt man $x = a^t \cos t$, $y = a^t \sin t$, so folgt für die Gleichung der im Punkt t gezogenen Tangente der Kurve:

$$(\xi - a^t \cos t)(\cos t + \sin t \cdot \ln a) a^t - (\eta - a^t \sin t)(- \sin t + \cos t \cdot \ln a) a^t = 0.$$

Diese Gleichung muß durch $\xi = x_1$, $\eta = y_1$ erfüllt werden; andrerseits lassen sich in sie die Koordinaten x, y des Berührungspunktes einführen, wodurch sich schließlich $x^2 + y^2 - x(x_1 - y_1 \ln a) - y(y_1 + x_1 \ln a) = 0$ ergibt.

Die Fußpunkte der *Normalen,* die man von P_1 auf die Kurve fällen kann, liegen auf dem Kreis $(x^2 + y^2) \ln a - x(y_1 + x_1 \ln a) + y(x_1 - y_1 \ln a) = 0$, der gleichfalls durch O und P_1 geht. Diese beiden Sätze folgen übrigens rein geometrisch, ohne jede Rechnung aus der Tatsache, daß bei jeder logarithmischen Spirale der Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor des Berührungspunktes konstant ist (vgl. Aufg. 31). Vgl. auch Aufg. 17, S. 70.

24. Man bestimme diejenigen Punkte der Ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, deren Normalen vom Mittelpunkt der Kurve den Abstand d haben.

Mit Hilfe von Aufg. 5, S. 47 findet man $d^2 = \dfrac{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 t \cdot \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$, woraus unter Benutzung von $b^2 = a^2 - c^2$, $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ der Wert:

$$\cos^2 t = \frac{c^2 + d^2 \pm \sqrt{R}}{2c^2}, \quad \text{wo} \quad R = (c^2 + d^2)^2 - 4a^2 d^2,$$

hervorgeht. Der Radikand R läßt sich hierbei zerlegen in

$$(a + d + b)(a + d - b)(a - d + b)(a - d - b).$$

Selbstverständlich ist $d < a$; damit R positiv wird, muß also auch $d < a - b$ sein, und dann ergeben sich, da $\sqrt{R} < c^2 + d^2$, offenbar

für $\cos^2 t$ zwei verschiedene positive Werte, also für $\cos t$ zwei verschiedene positive und zwei verschiedene negative Werte. So lange $d < a - b$, gibt es daher auf jedem Quadranten der Ellipse zwei Punkte der gewünschten Art. Im Falle $d = a - b$ fallen beide zusammen, man erhält dann im ganzen die vier Punkte $x = \frac{\pm a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$, $y = \frac{\pm b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$, wobei alle Vorzeichenkombinationen zu nehmen sind. Wir werden diesen Punkten noch mehrfach begegnen (vgl. Aufg. 32 und Fig. 53, S. 123f.).

25. Für die Kegelschnitte der konfokalen Schar (vgl. Aufg. 5 und Fig. 20, S. 60):

$$f(x, y, \lambda) \equiv \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0$$

ist der geometrische Ort aller Punkte zu bestimmen, deren Tangenten mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel α bilden, für den $\operatorname{tg} \alpha = \varkappa$ ist.

Aus $f(x, y, \lambda) = 0$ und $\varkappa = -f_1 : f_2$ hat man λ zu eliminieren. Es ergibt sich die gleichseitige Hyperbel

$$\varkappa(x^2 - y^2) + (\varkappa^2 - 1)xy - \varkappa(a^2 - b^2) = 0,$$

die mit den Kurven der Schar konzentrisch ist und durch ihre gemeinsamen Brennpunkte geht. Eine Asymptote dieser Hyperbel ist zur Richtung α parallel.

Da sich die Kurven der Schar rechtwinklig schneiden (vgl. Aufg. 5, S. 59), ergibt sich bei der Frage nach dem Ort aller Punkte der Kurven, deren *Normalen* mit der positiven Richtung der x-Achse einen gegebenen Winkel α einschließen, dieselbe Hyperbel.

26. Dieselbe Aufgabe für die Schar konfokaler Parabeln

$$y^2 - 2(p - \lambda)x + \lambda(p - \lambda) = 0.$$

Man findet die x-Achse (entsprechend $\alpha = 90^0$) und die Gerade

$$2\varkappa x + (\varkappa^2 - 1)y - \varkappa p = 0.$$

Alle diese Geraden, die zu verschiedenen Werten von $\varkappa$ gehören, gehen durch den gemeinsamen Brennpunkt $x = \frac{1}{2}p$, $y = 0$ der konfokalen Parabeln, und jede bildet mit der x-Achse einen Winkel γ, der doppelt so groß ist wie der Winkel α. Für $\alpha = \pm 45^0$ erhält man die Gerade $x = \frac{1}{2}p$.

27. Sind $y = f(x)$ und $y = g(x)$ die Gleichungen zweier Kurven und hat eine dritte Kurve die Gleichung $y = \frac{mf(x) + ng(x)}{m+n}$, so gehen alle diejenigen Tangenten dieser Kurven, die zu Punkten mit derselben Abszisse gehören, durch einen und denselben Punkt.[1])

1) Vgl. G. Peano, „Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale", Torino 1887, S. 91.

Es seien $y = y_1$ und $y = y_2$ die zur Abszisse x gehörigen Ordinaten der Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$; dann bestehen bei den drei Kurven folgende Gleichungen der in den Punkten mit der Abszisse x gezogenen Tangenten:

$$T_f \equiv (\xi - x) f'(x) - (\eta - y_1) = 0, \quad T_g \equiv (\xi - x) g'(x) - (\eta - y_2) = 0,$$

$$T \equiv (\xi - x) \frac{m f'(x) + n g'(x)}{m + n} - \left(\eta - \frac{m y_1 + n y_2}{m + n}\right) = 0.$$

Nun ist offenbar $(m + n) T \equiv m T_f + n T_g$, zwischen den linken Seiten der drei Tangentengleichungen besteht daher eine lineare Beziehung, d. h. die drei Geraden gehen durch einen und denselben Punkt, nämlich:

$$\xi = \frac{x(f'(x) - g'(x)) + g(x) - f(x)}{f'(x) - g'(x)}, \quad \eta = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{f'(x) - g'(x)}.$$

28. In jedem Punkt P der durch die Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegebenen Kurve denke man sich die Tangente gezogen und auf ihr von P aus nach beiden Seiten eine Strecke von der konstanten Länge l abgetragen (Figur 15). Zu zeigen, daß für den geometrischen Ort der Endpunkte Q_1, Q_2 dieser Strecken die Parameterdarstellung

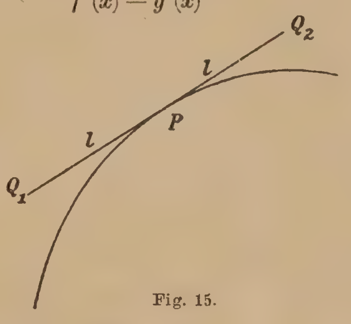


Fig. 15.

$$\xi = \varphi \pm \frac{l \varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \quad \eta = \psi \pm \frac{l \psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}$$

besteht.

Die Gleichung der Tangente $\frac{\eta - \psi}{\xi - \varphi} = \frac{\psi'}{\varphi'}$ liefert $\xi - \varphi = \sigma \varphi'$, $\eta - \psi = \sigma \psi'$, wo σ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, der mit Hilfe von $(\xi - \varphi)^2 + (\eta - \psi)^2 = l^2$ zu bestimmen ist. So erhält man die obige Parameterdarstellung, bei der die beiden Vorzeichen der Quadratwurzel den beiden Orten der Punkte Q_1 bzw. Q_2 entsprechen.

29. Die gleiche Aufgabe wie zuvor nur mit dem Unterschied, daß die Strecken von der konstanten Länge l von P aus auf die Normale nach beiden Seiten hin abgetragen werden. Die äußeren Endpunkte dieser Strecken erfüllen alsdann eine äußere, die inneren Endpunkte eine innere *Parallelkurve* zu der gegebenen Kurve.

Man erhält

$$\xi = \varphi \pm \frac{l \psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \quad \eta = \psi \mp \frac{l \varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}},$$

wo die oberen bzw. unteren Vorzeichen zusammengehören. Vgl. auch Aufg. 22 in § 19.

30. Bei der Archimedischen Spirale $r = a\vartheta$ bildet die dem

Punkt $\vartheta = 1$ (in Gradmaß $= 57^0 17' 44'', 8$) zugehörige Tangente mit dem Radiusvektor einen Winkel von 45^0. Vgl. Fig. 10, S. 38.

$$\operatorname{tg} \gamma = \vartheta \quad \text{(nach S. 46)}.$$

31. Bei der logarithmischen Spirale $r = a^\vartheta$ ist der Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor des Berührungspunktes konstant (Fig. 14, S. 51); speziell bei der Kurve $r = e^\vartheta$ beträgt er 45^0. Vgl. Aufg. 21, S. 39.

Man findet $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{\ln a}$, also ist γ von ϑ unabhängig.

32. Der Winkel γ, den die in irgend einem Punkt r, ϑ der Sinusspirale[1]) $r^m = a^m \sin m\vartheta$ gezogene Tangente mit dem Radiusvektor bildet, ist gleich $m\vartheta$, und das vom Anfangspunkt des Koordinatensystems auf die Tangente gefällte Lot bildet mit der Polarachse den Winkel $\varphi = (m+1)\vartheta - \frac{1}{2}\pi$.

Hier wird $m r^{m-1} \cdot r' = m a^m \cos m\vartheta$, $\operatorname{tg} \gamma = r : r' = \operatorname{tg} m\vartheta$, daher $\gamma = m\vartheta$. Ferner ist $\gamma = \varphi - \vartheta + \frac{1}{2}\pi$, $\varphi = \gamma + \vartheta - \frac{1}{2}\pi = (m+1)\vartheta - \frac{1}{2}\pi$. Vgl. auch Aufg. 28 und 30 in § 18.

33. Bei den Sinusspiralen $r^m = a^m \cos m\vartheta$ ist jener Winkel γ gleich $m\vartheta + \frac{1}{2}\pi$, der soeben mit φ bezeichnete Winkel gleich $(m+1)\vartheta$.

Es wird $\operatorname{tg}\gamma = r : r' = -\cot m\vartheta = \operatorname{tg}(m\vartheta + \frac{1}{2}\pi)$, daher $\gamma = m\vartheta + \frac{1}{2}\pi$. Ferner ist $\gamma = \varphi - \vartheta + \frac{1}{2}\pi$, $\varphi = \gamma + \vartheta - \frac{1}{2}\pi = (m+1)\vartheta$. Vgl. auch Aufg. 28 in § 18.

Aus dem Ergebnis folgt offenbar eine *Konstruktion für Normale und Tangente eines beliebigen Punktes der Sinusspirale*, also auch z. B. eines Punktes der *Lemniskate* $r^2 = 2c^2 \cos 2\vartheta$, die man im Fall $m = 2$ erhält (Fig. 16). Für sie wird $\varphi = \sphericalangle TOx = 3\vartheta$, wo $\vartheta = \sphericalangle POx$ ist.

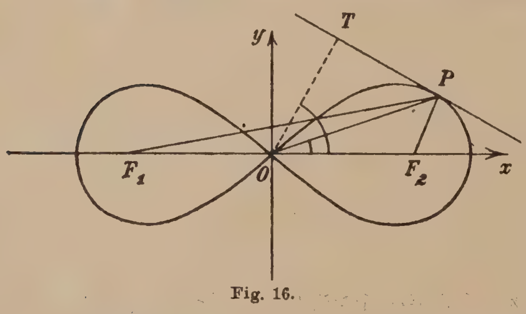


Fig. 16.

Die Lemniskate ist der geometrische Ort aller Punkte, für die das *Produkt* der Abstände von zwei festen Punkten F_1, F_2, den sogenannten Brennpunkten, konstant und zwar gleich dem Quadrat c^2 der Hälfte des gegenseitigen Abstandes $2c$ der beiden Brennpunkte ist. Das Wort Lemniskate stammt von dem griechischen λημνίσκος, zu deutsch Band oder Schleife.

34. Wird in irgend einem Punkt $P(x, y, z)$ eines Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

---

1) Zu den Sinusspiralen und ihrer Literatur vgl. den Artikel von G. Scheffers über „Besondere transzendente Kurven" in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III D 4, S. 216—222.

die Normale errichtet und bildet diese mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ, während die Winkel zwischen dem Radiusvektor von P und den Achsen gleich ϱ, σ, τ sind, so findet die Beziehung statt:

$$\cos\varrho : \cos\sigma : \cos\tau = a^2\cos\alpha : b^2\cos\beta : c^2\cos\gamma.$$

Dies soll bewiesen werden.

Die Gleichung der Tangentenebene des Punktes P ist

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + \frac{z\zeta}{c^2} - 1 = 0;$$

die Normale von P bildet sonach mit den Koordinatenachsen Winkel α, β, γ, für die $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{x}{a^2} : \frac{y}{b^2} : \frac{z}{c^2}$ folgt. Andrerseits bildet der Radiusvektor r des Punktes P mit den Achsen Winkel ϱ, σ, τ, wobei $\cos\varrho = \frac{x}{r}$, $\cos\sigma = \frac{y}{r}$, $\cos\tau = \frac{z}{r}$ ist. Aus diesen Gleichungen ergibt sich die behauptete Beziehung.

35. Auf einen Punkt P, der gezwungen ist, auf einer ebenen Kurve zu bleiben, wirken von den Koordinaten des Punktes abhängige Kräfte, deren Resultante (Mittelkraft) die den Koordinatenachsen parallelen Komponenten (Seitenkräfte) X, Y besitzt. Wie findet man diejenigen Stellen der Kurve, an denen sich P unter Einwirkung der Kräfte im Gleichgewicht befindet, und zwar a) wenn die Kurve die Gleichung $f(x, y) = 0$ hat, b) wenn sie durch eine Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben ist?

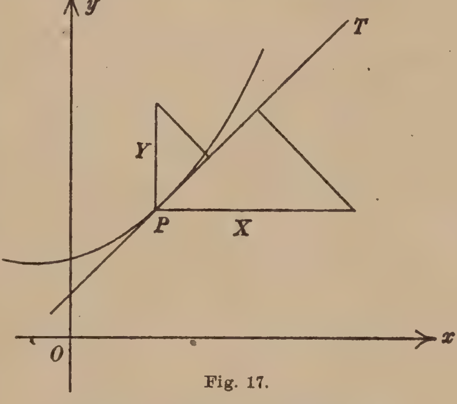


Fig. 17.

P muß so gelegen sein, daß sich die auf die zugehörige Kurventangente PT fallenden Komponenten von X und Y gegenseitig aufheben, also eine identisch verschwindende Summe besitzen. Diese Komponenten sind (vgl. Fig. 17):

$$X\cos(TPX) \quad \text{und} \quad Y\cos(TPY) = Y\sin(TPX),$$

also im Fall a):

$$\frac{Xf_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \quad \text{und} \quad \frac{-Yf_1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}},$$

daher muß $Xf_2 - Yf_1$ verschwinden, d. h.

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} = 0$$

sein. Aus dieser Gleichung und aus $f(x, y) = 0$ sind die Koordinaten der gesuchten Punkte zu berechnen.

Sind X und Y die nach x bzw. y genommenen partiellen Ableitungen einer Funktion $V(x, y)$, d. h. haben die Kräfte eine Kräftefunktion oder ein Potential, so ist vorstehende Determinante nach Aufg. 23, S. 39 die *Funktionaldeterminante* von V und f.

Im Fall b) erhält man für die Parameter der gesuchten Punkte die Gleichung $X\varphi'(t) + Y\psi'(t) = 0$, wo X, Y gegebene Funktionen von t sind.

36. Die analoge Aufgabe für eine Raumkurve, die a) als Schnittkurve zweier Flächen $f(x, y, z) = 0$ und $g(x, y, z) = 0$, b) durch eine Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, $z = \psi(t)$ gegeben ist. Die Resultante der wirkenden Kräfte habe die den Koordinatenachsen parallelen Komponenten X, Y, Z.

Man hat im Fall a) die drei Gleichungen

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

$$f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz = 0 \quad \text{und} \quad g_1dx + g_2dy + g_3dz = 0,$$

aus denen

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = 0$$

folgt. Sind X, Y, Z die nach x bzw. y bzw. z genommenen partiellen Ableitungen einer Kräftefunktion $V(x, y, z)$, so ist diese Determinante die *Funktionaldeterminante* von V, f und g (vgl. Aufg. 35).

Im Fall b) muß $X\varphi'(t) + Y\chi'(t) + Z\psi'(t) = 0$ sein.

37. Die analoge Aufgabe für eine Fläche $f(x, y, z) = 0$.

Der Punkt P befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Resultante R der wirkenden Kräfte in die Flächennormale von P fällt. Für $X = R\cos\alpha$, $Y = R\cos\beta$, $Z = R\cos\gamma$ tritt dies ein, wenn die Winkel α, β, γ zwischen der Resultante R und den Koordinatenachsen zugleich die Winkel zwischen der Normale und diesen Achsen sind. Da $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = f_1 : f_2 : f_3$, erhält man $X : f_1 = Y : f_2 = Z : f_3$; in Verbindung mit $f(x, y, z) = 0$ bestimmen diese Gleichungen die Koordinaten der gesuchten Gleichgewichtsstellen.

38. Ein materieller Punkt (Masse m) ist gezwungen, auf der Parabel $x^2 - py = 0$ zu bleiben; auf ihn wirkt die Schwerkraft und eine horizontale Kraft H. An welcher Stelle der Kurve befindet sich der Punkt nach dem zu Aufg. 35 gehörigen Ergebnis im Gleichgewicht, wenn die positive Richtung der y-Achse vertikal nach oben genommen wird?

Wirkt H parallel zur positiven Richtung der x-Achse, so ist $X = H$; ferner ist $Y = -mg$, wenn g die in der negativen Richtung der y-Achse wirkende Beschleunigung der Schwere bedeutet (für Berlin ist $g = 9{,}81$ m). Die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} H & -mg \\ 2x & -p \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - py = 0$$

liefern $x = \frac{Hp}{2mg}$, $y = \frac{H^2 p}{4m^2 g^2}$.

39. Ein Faden von der Länge $2a$ ist in seinen beiden Endpunkten F_1, F_2 befestigt und trägt ein (etwa mit Hilfe eines Ringes) verschiebbares Gewicht Q. Man zeige, daß Gleichgewicht vorliegt, wenn das Gewicht Q an einer solchen Stelle der durch F_1, F_2 als Brennpunkte und die Hauptachsenlänge $2a$ bestimmten Ellipse aufgehängt ist, deren Tangente horizontal verläuft.

Der Angriffspunkt P des Gewichtes befindet sich jedenfalls auf einer Ellipse, die F_1, F_2 zu Brennpunkten und $2a$ zur Hauptachse hat; ihre Gleichung sei $f(x, y) = 0$. Man erhält alsdann

$$\begin{vmatrix} 0 & -Q \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} = 0,$$

also $f_1 = 0$, d. h. die in P gezogene Tangente muß zu der horizontal liegenden x-Achse parallel sein. Die Geraden PF_1 und PF_2 sind gegen diese Tangente unter gleichen Winkeln geneigt (Fig. 18).

40. Man bestimme unter denselben Voraussetzungen wie bei Aufg. 35 die Größe D des Druckes, den der Punkt P vermöge der auf ihn wirkenden Kräfte auf die Kurve ausübt.

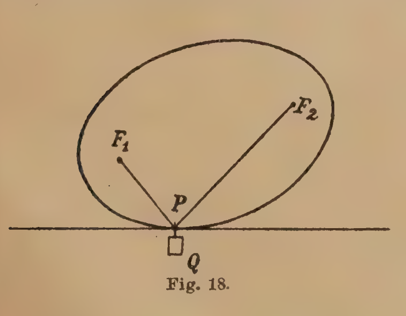


Fig. 18.

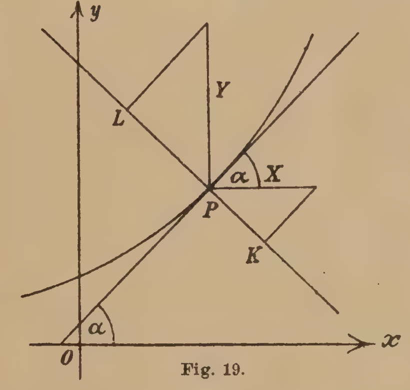


Fig. 19.

Hier ist die algebraische Summe der auf die Normale von P fallenden Komponenten PK und PL von X bzw. Y zu bilden. Man findet (Fig. 19) $PK = X \sin\alpha$, $PL = Y\cos\alpha$ oder $PK = \frac{Xf_1}{\pm\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$, $PL = \frac{Yf_2}{\mp\sqrt{f_1^2+f_2^2}}$, der gesuchte Druck wird daher

$$D = |PK - PL| = \left|\frac{Xf_1 + Yf_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}\right|.$$

41. Ein materieller Punkt P (Masse m) befinde sich unter Einwirkung der Schwerkraft und sei gezwungen, auf der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ zu bleiben. Welche Horizontalkraft X muß auf ihn

einwirken, wenn er sich an jeder Stelle der Ellipse im Gleichgewicht befinden soll und sich die positive Richtung der y-Achse wieder vertikal nach oben erstreckt? Wie groß ist außerdem der Druck D, den der Punkt alsdann auf die Ellipse ausübt?

Man hat

$$\begin{vmatrix} X & -mg \\ \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{daher} \quad X = \frac{-mgb^2}{a^2}\,\frac{x}{y}.$$

Der gesuchte Druck wird

$$D = \left| -\frac{mg}{a^2 y}\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2} \right| = \left| \frac{X}{b^2 x}\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2} \right|.$$

42. Ist ein Punkt P gezwungen, auf der Kurve $f(x, y) = 0$ zu bleiben und wirkt auf ihn eine Kraft mit Komponenten X, Y, die gleich den Koordinaten von P sind, so übt er an der Stelle P auf die Kurve einen Druck aus, der durch die Länge des vom Koordinatenanfang auf die Tangente von P gefällten Lotes dargestellt ist.

Folgt aus den Ergebnissen von Aufg. 40, S. 57 und Aufg. 11, S. 48.

§ 9.

Winkel, unter dem sich zwei Kurven schneiden.

1. Für den Winkel $\varkappa$, unter dem sich zwei Kurven $f(x, y) = 0$ und $g(x, y) = 0$ in einem Punkt $P_1(x_1, y_1)$ schneiden, gilt die Formel

$$\operatorname{tg} \varkappa = \pm \left[\frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{f_1 g_1 + f_2 g_2}\right]_{\substack{x = x_1 \\ y = y_1}}.$$

Bezüglich der beiden Vorzeichen bemerken wir Folgendes: Der Winkel, unter dem sich die Kurven in P_1 schneiden, ist zugleich der Winkel ihrer in P_1 gezogenen Tangenten. Wird im Augenblick von dem Fall der rechtwinkligen und dem der parallelen Lage der beiden Tangenten abgesehen und werden auch die überstumpfen (konvexen) Winkel, die beim Schnitt zweier Geraden stets vorkommen, unberücksichtigt gelassen, so ist von den Winkeln der Tangenten der eine (und sein Scheitelwinkel) spitz, der andere (und sein Scheitelwinkel) stumpf. In der vorstehenden Formel ist nun $\varkappa$ derjenige Winkel dieser Tangenten, der in seiner Größe mit dem konkaven Winkel der vom Koordinatenanfang O auf die Tangenten gefällten Lote übereinstimmt. Man hat in der Formel für $\operatorname{tg} \varkappa$ rechts das Plus- oder Minuszeichen zu setzen, je nachdem die von O auf die Tangenten von $f(x, y) = 0$ bzw. $g(x, y) = 0$ gefällten Lote so zueinander liegen wie die positive x-Achse zur positiven y-Achse oder umgekehrt.

2. Zwei Kurven $f(x, y) = 0$ und $g(x, y) = 0$ berühren sich in einem gemeinsamen Punkt x_1, y_1, falls $\left[f_1 g_2 - f_2 g_1\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} = 0$ ist; sie schneiden sich rechtwinklig, falls $\left[f_1 g_1 + f_2 g_2\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} = 0$ ist.

Beispiele.

1. Unter welchen Winkeln schneiden sich der Kreis $x^2 + y^2 - 8 = 0$ und die Parabel $y^2 - 2x = 0$?

Die Kurven schneiden sich in zwei Punkten P_1 und P_2 mit den Koordinaten $x_1 = 2$, $y_1 = 2$ bzw. $x_2 = 2$, $y_2 = -2$; außerdem haben sie zwei imaginäre Punkte gemeinsam. Für den Punkt P_1 wird $\operatorname{tg} \varkappa_1 = \left[\frac{4xy + 4y}{-4x + 4y^2}\right]_{\substack{x=2\\y=2}} = 3$, für P_2 wird $\operatorname{tg} \varkappa_2 = -\left[\frac{4xy + 4y}{-4x + 4y^2}\right]_{\substack{x=2\\y=-2}} = 3$, daher ist $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 71^0 33' 54''$.

2. Unter welchen Winkeln schneiden sich die Parabeln $y^2 - px = 0$ und $x^2 - py = 0$?

Die Kurven schneiden sich im Koordinatenanfang rechtwinklig, für den Schnittpunkt $x = y = p$ wird $\operatorname{tg} \varkappa = -\frac{3}{4}$, $\varkappa = 143^0 7' 49''$; die beiden übrigen gemeinsamen Punkte sind imaginär.

3. Die beiden Parabeln $y^2 - 2ax - a^2 = 0$ und $y^2 + 2bx - b^2 = 0$ berühren sich im Unendlichen und schneiden sich in den beiden Punkten $x = \frac{b-a}{2}$, $y = \pm\sqrt{ab}$ rechtwinklig.

4. Die beiden gleichseitigen Hyperbeln $x^2 - y^2 = 2m^2$ und $xy = c^2$ treffen sich in ihren vier Schnittpunkten, von denen übrigens zwei imaginär sind, rechtwinklig.

Der Ausdruck $f_1 g_1 + f_2 g_2$ verschwindet identisch. Für die Koordinaten x, y der Schnittpunkte findet man $x^2 = m^2 \pm \sqrt{m^4 + c^4}$, $y^2 = -m^2 \pm \sqrt{m^4 + c^4}$, wo bei den Wurzeln jedesmal die oberen oder jedesmal die unteren Vorzeichen zu nehmen sind. Die Vorzeichen der Werte von x und y müssen mit Rücksicht auf $xy = c^2$ einander gleich sein.

5. Wenn die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ und die mit ihr koachsiale Hyperbel $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$ dieselben Brennpunkte haben (konfokal sind), schneiden sie sich rechtwinklig.

Voraussetzung ist hier $a^2 - b^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Der Ausdruck, dessen Verschwinden anzeigt, daß sich die Kurven rechtwinklig schneiden, wird $4\left(\frac{x^2}{a^2\alpha^2} - \frac{y^2}{b^2\beta^2}\right)$ und reduziert sich bei Einführung der Koordinaten der Schnittpunkte auf $b^2 + \beta^2 - (a^2 - \alpha^2)$, aber dies ist infolge der Voraussetzung tatsächlich gleich Null.

Die Gleichung $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1=0$ stellt den unendlich vielen Werten des Parameters λ entsprechend ein ganzes System konfokaler Kegelschnitte dar; durch einen beliebigen Punkt P der Ebene gehen zwei Kurven des Systems, und zwar eine Ellipse und eine Hyperbel (vgl. Fig. 20), die sich in P rechtwinklig schneiden.

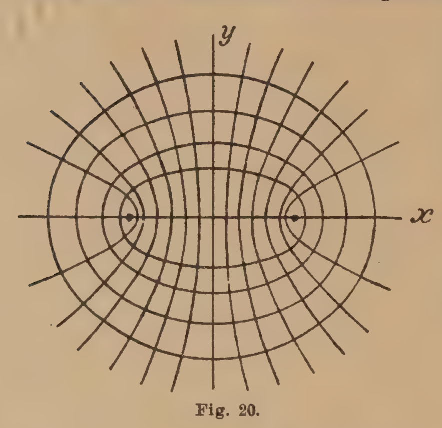


Fig. 20.

6. Man bestimme den Winkel, unter dem sich die beiden konzentrischen gleichseitigen Hyperbeln

$$a_{11}(x^2-y^2)+2a_{12}xy+a_{33}=0$$

und

$$b_{11}(x^2-y^2)+2b_{12}xy+b_{33}=0$$

schneiden, und stelle die Bedingung dafür auf, daß der Schnitt unter rechtem Winkel erfolgt. Der Mittelpunkt beider Kurven liegt im Koordinatenanfang.

Man findet

$$\operatorname{tg}\varkappa=\pm\frac{a_{11}b_{12}-a_{12}b_{11}}{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}};$$

$\varkappa$ wird gleich 90^0, falls $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}=0$ ist, eine Bedingung, die das Ergebnis von Aufg. 4 als besonderen Fall in sich schließt.

7. Zu zeigen, daß sich die Kurven

$$x^m y^n - a = 0 \text{ und } \frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{n}-b=0$$

rechtwinklig schneiden.

Auch diese Aufgabe umfaßt Aufg. 4 als besonderen Fall.

8. Zu zeigen, daß sich die Kurven

$$\frac{x^m}{a}-\frac{y^n}{b}=0 \text{ und } \frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}-c=0$$

rechtwinklig schneiden.

9. Für welchen Wert der Konstante c schneidet der Kreis $x^2+y^2+6y-c=0$ die Parabel $x^2-2y=0$ rechtwinklig?

$f_1g_1+f_2g_2=0$ wird $4x^2-4(y+3)=0$; mit Hilfe dieser Bedingung findet man $c=33$.

10. Welche Bedingung muß erfüllt werden, wenn sich die Parabel $y^2-px=0$ und die Ellipse $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ berühren sollen?

Die Bedingung der Berührung $f_1g_2-f_2g_1=0$ wird

$$y\left\{\frac{p}{b^2}+\frac{2(x-\alpha)}{a^2}\right\}=0.$$

Setzt man den Faktor y gleich Null, so berühren sich die Kurven im Koordinatenanfang, falls $\alpha = \pm a$ ist. Das Verschwinden des Klammerfaktors liefert $4\alpha b^2 p = a^2 p^2 + 4b^4$ als Bedingung für die Berührung an den Stellen

$$x = \frac{4b^4 - a^2p^2}{4b^2 p}, \quad y = \pm \frac{1}{2b}\sqrt{4b^4 - a^2p^2}.$$

11. Für welchen Wert von r berühren sich die Astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0 \text{ und der Kreis } x^2 + y^2 - r^2 = 0?$$

Die Bedingung $x^{\frac{1}{3}} y - y^{\frac{1}{3}} x = 0$ ist zu erfüllen; man findet die vier Berührungspunkte $x = \pm \frac{1}{4} a \sqrt{2}$, $y = \pm \frac{1}{4} a \sqrt{2}$ und für r den Wert $\frac{1}{2} a$.

12. Wird die Funktion $f(x + iy)$ der komplexen Veränderlichen $x + iy$ in die Form $u(x, y) + iv(x, y)$ gebracht, wo u und v reelle Funktionen von x und y sind, so treffen sich die Kurven $u(x, y) - c_1 = 0$ und $v(x, y) - c_2 = 0$, wo c_1 und c_2 beliebige Konstanten bedeuten, in ihren Schnittpunkten rechtwinklig. Dies soll bewiesen werden.

Der Satz ergibt sich sofort, wenn man die Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ berücksichtigt, denen die Funktionen u und v nach Aufg. 16, S. 28 genügen.

§ 10.

Fußpunktkurven.

Fällt man von einem beliebig, aber fest gewählten Punkt Q der Ebene Lote auf alle Tangenten einer Kurve k (Grundkurve), so erfüllen die Fußpunkte dieser Lote eine zweite Kurve, die *Fußpunktkurve* von k mit Bezug auf den Pol Q.

1. Wie gelangt man zur Gleichung der Fußpunktkurve, wenn die Grundkurve k durch $f(x, y) = 0$ gegeben ist und der Pol Q a) im Koordinatenanfang O liegt oder b) die Koordinaten $x = a$, $y = b$ hat?

a) Die Gleichung der im Punkt $P(x, y)$ der Kurve $f(x, y) = 0$ gezogenen Tangente lautet $(\xi - x)\frac{dy}{dx} - (\eta - y) = 0$, während das auf diese Tangente aus O gefällte Lot die Gleichung hat $\xi + \eta \frac{dy}{dx} = 0$. Da die Koordinaten x_1, y_1 des dem Punkt P entsprechenden Punktes P_1 der Fußpunktkurve diese beiden Gleichungen erfüllen, ist

$$(1) \qquad (x_1 - x)\frac{dy}{dx} - (y_1 - y) = 0, \quad x_1 + y_1 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Hieraus und aus $f(x, y) = 0$ wäre x, y zu eliminieren, um die Gleichung der Fußpunktkurve in der impliziten Form $F(x_1, y_1) = 0$

zu erhalten. Übrigens läßt sich die erste Gleichung (1), wie man sofort sieht, mit Rücksicht auf die zweite ersetzen durch

(2) $$x_1 x + y_1 y - (x_1^2 + y_1^2) = 0$$

und hierdurch die Elimination im allgemeinen erleichtern.

b) Hat der Pol die Koordinaten a, b, so sind x und y zu eliminieren aus

(3) $$(x_1 - x)\frac{dy}{dx} - (y_1 - y) = 0,\ x_1 - a + (y_1 - b)\frac{dy}{dx} = 0 \text{ und } f(x,y) = 0,$$

wobei die erste Gleichung mit Rücksicht auf die zweite auch ersetzt werden kann durch

(4) $$(x_1 - a)x + (y_1 - b)y + ax_1 + by_1 - (x_1^2 + y_1^2) = 0.$$

2. Die Grundkurve sei durch eine Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben; wie lautet die Parameterdarstellung der Fußpunktkurve in den beiden soeben mit a) und b) bezeichneten Fällen?

Im Fall a) folgt:

$$x_1 = \frac{\varphi\psi' - \psi\varphi'}{\varphi'^2 + \psi'^2}\psi',\ y_1 = -\frac{\varphi\psi' - \psi\varphi'}{\varphi'^2 + \psi'^2}\varphi',$$

im Fall b):

$$x_1 = a + \sigma\psi',\ y_1 = b - \sigma\varphi',\ \text{wobei } \sigma = \frac{(\varphi - a)\psi' + (\psi - b)\varphi'}{\varphi'^2 + \psi'^2}.$$

3. Man bestimme die Fußpunktkurve der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ mit Bezug auf den Mittelpunkt als Pol.

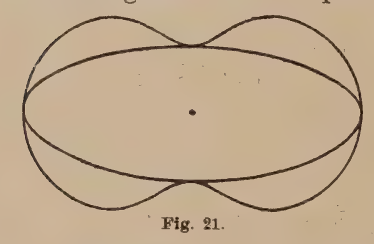


Fig. 21.

Man findet

$$(x_1^2 + y_1^2)^2 - (a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2) = 0.$$

Vgl. Fig. 21.

4. Die gleiche Aufgabe für die gleichseitige Hyperbel

$$\frac{x^2 - y^2}{2a^2} - 1 = 0.$$

Man findet die Lemniskate $(x_1^2 + y_1^2)^2 - 2a^2(x_1^2 - y_1^2) = 0$. Vgl. Fig. 16, S. 54.

5. Die Zissoide $(x_1^2 + y_1^2)x_1 - 2ay_1^2 = 0$ ist die Fußpunktkurve der Parabel $y^2 + 8ax = 0$ für den Scheitel als Pol.

Hier wird $y = \frac{4ay_1}{x_1}$, $x = -\frac{2ay_1^2}{x_1^2}$, und die Substitution dieser beiden Ausdrücke in die oben mit (2) bezeichnete Gleichung liefert sofort die Zissoide. Diese Kurve kann auch so erzeugt werden: Man beschreibt einen Kreis vom Durchmesser $2a = OA$ (Fig. 22) und schneidet die im Endpunkt A des Durchmessers gezogene Kreistangente mit beliebigen durch O gelegten Strahlen. Trifft ein solcher Strahl s diese Kreistangente in K, den Kreis in L, und trägt man auf

s von O aus $OS = LK$ ab, so ist der Endpunkt S dieser Strecke ein Punkt der Zissoide. Das Wort Zissoide stammt von dem griechischen κισσός, zu deutsch Epheu. Die Alten betrachteten nur den innerhalb des vorerwähnten Kreises gelegenen Teil der Kurve.

6. Werden vom Brennpunkt einer Parabel auf die Tangenten der Kurve Lote gefällt, so liegen ihre Fußpunkte auf der Scheiteltangente (Fig. 23).

Die Gleichung einer Parabel, deren Hauptachse auf der x-Achse und deren Brennpunkt im Koordinatenanfang O liegt, lautet

$$y^2 - px - \frac{p^2}{4} = 0.$$

Für die Fußpunktkurve in Bezug auf O findet man

$$(x_1^2 + y_1^2) \cdot (4x_1 + p) = 0,$$

sie besteht also aus dem durch O gelegten zirkularen, d. h. durch die imaginären Kreispunkte gehenden imaginären Geradenpaar $x_1^2 + y_1^2 = 0$ und aus der Scheiteltangente $x_1 = -\frac{p}{4}$.

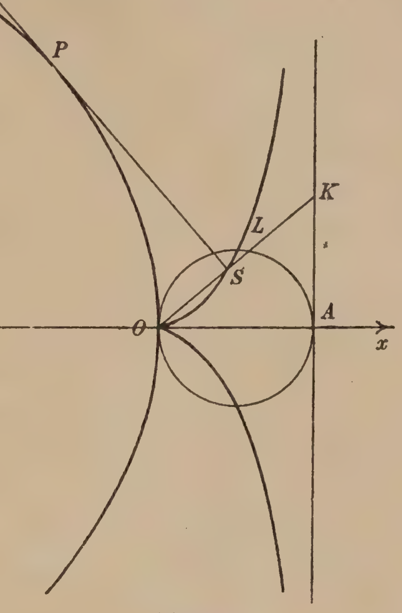


Fig. 22.

7. Die gleiche Aufgabe für die Ellipse oder Hyperbel liefert den Kreis über der Hauptachse als Durchmesser.

Die Ellipse, deren Hauptachse auf der x-Achse und deren einer Brennpunkt im Koordinatenanfang O liegt, hat die Gleichung

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

wo $c^2 = a^2 - b^2$. Als Fußpunktkurve in Bezug auf O findet man

$$(x_1^2 + y_1^2)\{(x_1 - c)^2 + y_1^2 - a^2\} = 0,$$

somit das durch O gelegte zirkulare Geradenpaar und den eben erwähnten Kreis. Analog bei der Hyperbel.

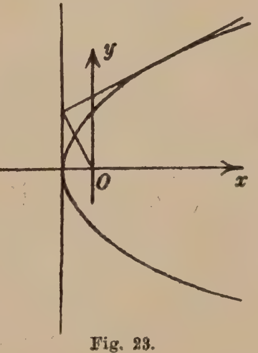


Fig. 23.

8. Die Kardioide

$$(x_1^2 + y_1^2 - px_1)^2 - p^2(x_1^2 + y_1^2) = 0$$

ist die Fußpunktkurve des Kreises $(x-p)^2 + y^2 - p^2 = 0$ mit Bezug auf den Koordinatenanfang, der selbst auf der Kurve liegt (Fig. 24).

Die Kardioide wird aus einem Kreis abgeleitet, indem man durch einen Punkt O desselben einen beliebigen Strahl zieht, der den Kreis

zum zweiten Mal in S trifft; von S aus trägt man auf diesen Strahl nach beiden Seiten eine Strecke ab, die so groß ist wie der Durchmesser des Kreises. Der geometrische Ort der Endpunkte P und Q dieser Strecken ist die Kardioide. Der hier erwähnte Kreis ist der kleinere Kreis der Figur. Der um den Endpunkt A seines Durchmessers mit diesem Durchmesser als Radius beschriebene größere Kreis der Figur ist derjenige, dem die Kardioide als Fußpunktkurve mit Bezug auf den Pol O zugehört.

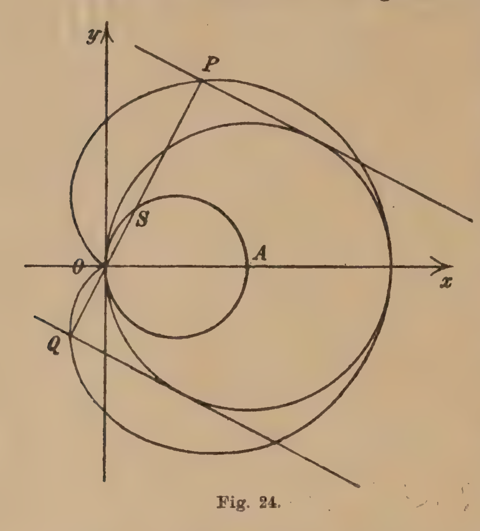


Fig. 24.

Das Wort Kardioide stammt von dem griechischen *καρδία*, zu deutsch Herz.

Gibt man der abgetragenen Strecke $SP = SQ$ eine beliebige konstante Länge, so erhält man eine allgemeinere Kurve, die Pascalsche Schneckenlinie, wahrscheinlich so genannt nach Stephan Pascal, dem Vater des berühmten Philosophen und Mathematikers Blaise Pascal.

9. Die Fußpunktkurve der Kreisevolvente

$$x = a\cos t + at\sin t,\; y = a\sin t - at\cos t$$

in Bezug auf den Koordinatenanfang ist eine Archimedische Spirale.

Man benutzt die Gleichungen in Aufg. 2, Fall a) und findet

$$x_1 = at\sin t = at\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right),\; y_1 = -at\cos t = at\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Die Kreisevolvente entsteht dadurch, daß eine Gerade auf einem Kreis abrollt, ohne zu gleiten; ein Punkt dieser Geraden beschreibt alsdann die Kreisevolvente. Hier ist

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

die Gleichung des festen Kreises, und der die Evolvente beschreibende Punkt befindet sich zu Anfang der Bewegung der Geraden in deren Berührungspunkt $x = a$, $y = 0$ mit dem Kreis.

10. Die Sinusspirale $r^n = a^n \cos n\vartheta$ vom Index n hat zur Fußpunktkurve mit Bezug auf den Koordinatenanfang O als Pol die Sinusspirale vom Index $\frac{n}{n+1}$, nämlich $r_1^{\frac{n}{n+1}} = a^{\frac{n}{n+1}} \cos\frac{n}{n+1}\vartheta_1$.

Ist die Grundkurve k, wie hier, durch ihre Gleichung in Polarkoordinaten gegeben, so genügt es, die Länge r_1 des vom Pol O auf die Tangente irgend eines Punktes P der Grundkurve gefällten Lotes

als Funktion des Winkels ϑ_1 darzustellen, den dieses Lot mit der Polarachse des Koordinatensystems bildet. Im vorliegenden Beispiel ist dieser Winkel nach Aufg. 33, S. 54, gleich $(n+1)\vartheta$, daher (vgl. z. B. Fig. 16 zu Aufg. 33, S. 54)

$$r_1 = r\cos n\vartheta = a\sqrt[n]{\cos n\vartheta}\cdot\cos n\vartheta = a\cos^{\frac{n+1}{n}}(n\vartheta),$$

und hier ist noch ϑ_1 an Stelle von ϑ einzuführen durch $\vartheta_1 = (n+1)\vartheta$. Man erhält

$$r_1 = a\cdot\cos^{\frac{n+1}{n}}\frac{n}{n+1}\vartheta_1 \quad\text{oder}\quad r_1^{\frac{n}{n+1}} = a^{\frac{n}{n+1}}\cos\frac{n}{n+1}\vartheta_1.$$

Ein ähnliches Ergebnis folgt für Sinusspiralen mit der Gleichung $r^n = a^n \sin n\vartheta$.

11. Mit Hilfe dieses Ergebnisses zeige man, daß die „zweite Fußpunktkurve" (Fußpunktkurve von der Fußpunktkurve unter Beibehaltung desselben Poles O) eine Sinusspirale vom Index $\frac{n}{2n+1}$, die dritte eine solche vom Index $\frac{n}{3n+1}$, die k^{te} Fußpunktkurve eine Sinusspirale vom Index $\frac{n}{kn+1}$ ist.[1])

Weitere Aufgaben über Fußpunktkurven, insbesondere über sogenannte *negative Fußpunktkurven* werden in § 19, Aufg. 15—21 gegeben.

§ 11.

Subtangente und Subnormale, Länge von Tangente und Normale.

1. Unter den Längen der Tangente und Normale eines Kurvenpunktes P versteht man die Längen dieser Geraden gemessen vom Punkt P bis zum Schnittpunkt mit der x-Achse; wir werden sie mit T bzw. N bezeichnen. Subtangente (St) und Subnormale (Sn) sind die Projektionen von T und N auf die x-Achse.

2. Ist die Kurve gegeben durch $y = f(x)$, so gelten für diese Größen die Formeln:

$$St = y : y', \; Sn = yy', \; T = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}, \; N = y\sqrt{1+y'^2}.$$

Liegt die Gleichung der Kurve in der Form $f(x,y) = 0$ vor, so ist hier y' durch $-f_1 : f_2$ zu ersetzen und im Falle der Darstellung der Kurve durch $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ tritt an Stelle von y' der Quotient $\psi'(t) : \varphi'(t)$.

1) Vgl. die Fußnote zu S. 54, sowie G. Loria „Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven", deutsch bearb. von F. Schütte, Leipzig 1902, S. 675.

3. Je nachdem y und y' gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, erstreckt sich die Subtangente vom Fußpunkt M der Ordinate von P in der negativen oder positiven Richtung der x-Achse, bei der Subnormale ist es umgekehrt (Fig. 25).

Fig. 25.

4. Ist die Kurve durch eine Gleichung in Polarkoordinaten $r = f(\vartheta)$ gegeben, so bedeutet Länge der Tangente oder Normale die Länge dieser Geraden gemessen vom Punkt P bis zu ihrem Schnittpunkt *mit einer durch den Koordinatenanfang rechtwinklig zum Radiusvektor von P gezogenen Geraden g*, die also mit P ihre Lage ändert. Man bezeichnet diese Strecken als Polartangente bzw. Polarnormale, ihre Projektionen auf die Gerade g als Polarsubtangente bzw. Polarsubnormale.

Hier gelten die Formeln:

$$St = \frac{r^2}{r'},\ Sn = r',\ T = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2},\ N = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

5. Je nachdem r und r' gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, erstreckt sich die Polarsubtangente auf der Geraden g vom Koordinatenanfang O aus nach der positiven oder negativen Richtung von g, bei der Polarsubnormale ist es umgekehrt. Hierbei ist die positive Richtung von g diejenige, die zu dem von O nach P gezogenen Radiusvektor so liegt wie die positive x-Achse zur positiven y-Achse.

Beispiele.

1. Die Subtangente eines Punktes x, y der Kurve $y = cx^n$ ist gleich $\frac{1}{n}x$, also für die Parabel $y = cx^2$ gleich $\frac{1}{2}x$; bei der Kurve $y^n = cx$ ist die Subtangente gleich nx, also für die Parabel $y^2 = cx$ gleich $2x$. Wie ist dies zur Konstruktion der Tangente in irgend einem Punkt dieser Kurven zu verwerten?

Es genügt, dies an zwei Beispielen zu zeigen. Soll z. B. für irgend einen Punkt P der semikubischen oder Neilschen Parabel $y = cx^{\frac{3}{2}}$ die Tangente gezeichnet werden, so teile man die Abszisse OM des Punktes P (Fig. 26, wo $c^2 = \frac{1}{32}$ und $x = 8$ ist) in drei gleiche Teile. Durch den Teilpunkt T, der von M den Abstand $\frac{2}{3}x$ hat, geht die Tangente von P hindurch, denn es ist $St = x : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}x$.

Ist die gleichseitige Hyperbel $xy = c$ oder $y = cx^{-1}$ gegeben, so hat man nur die Abszisse OM des Kurvenpunktes P (Fig. 27) von

M aus nach rechts abzutragen ($OM = MT$); durch den Endpunkt T dieser Strecke geht die Tangente hindurch, denn jetzt ist $St = -x$.

2. Bei der Parabel $y^2 = px$ ist die Subnormale für alle Punkte der Kurve gleich $\frac{1}{2}p$, also doppelt so groß wie der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel, denn dieser Abstand beträgt $\frac{1}{4}p$.

Dies läßt sich zur Konstruktion der Normale eines Punktes der Parabel verwerten.

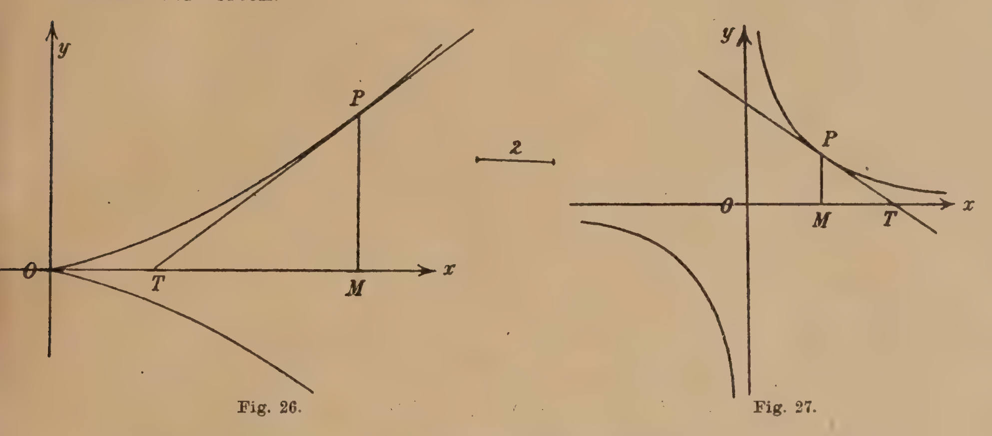


Fig. 26. Fig. 27.

3. Für den Punkt $x = 3$, $y = 2$ der Parabel $y = x^2 - 4x + 5$ berechne man die Längen St, Sn, T, N.

$$St = 1, \quad Sn = 4, \quad T = \sqrt{5}, \quad N = 2\sqrt{5}.$$

4. Für welche Punkte der Parabel $y = (x - 3)^2$ ist die absolute Länge der Subtangente gleich 2?

Es wird $St = \frac{1}{2}(x - 3)$; man findet die Punkte $x = 7$, $y = 16$ und $x = -1$, $y = 16$.

5. Die Subtangente der Kurve $y = a^x$ ist konstant, und zwar gleich $\frac{1}{\ln a}$.

6. Zwischen der Länge T der Tangente, der Länge N der Normale und der Ordinate y eines Kurvenpunktes besteht die Beziehung $\frac{1}{T^2} + \frac{1}{N^2} = \frac{1}{y^2}$.

Folgt aus dem Umstand, daß T und N Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, das y zur Hypotenusenhöhe hat.

7. Bei allen Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} - 1 = 0$, die eine Achse $2a$ gemeinsam haben, während die andere beliebig, gleich 2λ, ist, haben Punkte von gleicher Abszisse x dieselbe Subtangente. Man beweise diese Eigenschaft und verwende sie zur Konstruktion der Tangente irgendeines Punktes der Ellipse, indem man beachtet, daß sich unter diesen Ellipsen auch der Kreis $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ befindet.

Hier wird $St = -\frac{a^2 - x^2}{x}$, also in der Tat unabhängig von der Achse 2λ. Hat nun der Ellipsenpunkt P dieselbe Abszisse wie der Punkt Q des Kreises $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - 1 = 0$, so haben beide Punkte dieselbe Subtangente MT, die für Q in einfachster Weise zu konstruieren ist (Fig. 28). Die Verbindungslinie von T mit P ist alsdann die Tangente des Punktes P der Ellipse.

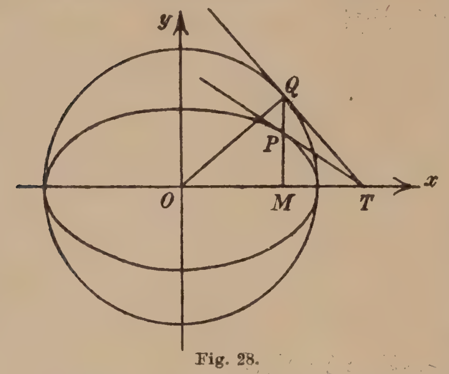


Fig. 28.

8. Ist eine Kurvenschar gegeben durch $y = \lambda f(x)$, wo λ einen veränderlichen Parameter, $f(x)$ eine eindeutige Funktion von x bezeichnet, so haben Punkte gleicher Abszisse bei diesen Kurven dieselbe Subtangente; die Tangenten dieser Punkte treffen sich also sämtlich in einem und demselben Punkt der x-Achse.

Die Subtangente $St = \frac{f(x)}{f'(x)}$ ist nämlich von λ unabhängig.

9. Man zeige, daß bei den Kurven $y = f(x)$ und $y = \frac{a}{f(x)}$ entsprechende Punkte von gleicher Abszisse Subtangenten haben, die von gleicher absoluter Länge, aber entgegengesetzt gerichtet sind.[1])

Für $y = f(x)$ wird $St = \frac{f(x)}{f'(x)}$; für $y = \frac{a}{f(x)}$ wird $St = -\frac{f(x)}{f'(x)}$.

10. Bei den Kurven $y = f(x)$ und $y^n = af(x)$ haben entsprechende Punkte von gleicher Abszisse Subtangenten St_1 bzw. St_2, die in der Beziehung stehen $St_2 = nSt_1$.

Aus $y^n = af(x)$ folgt $ny^{n-1}y' = af'(x)$, $\frac{ny^{n-1} \cdot y'}{y^n} = \frac{f'(x)}{f(x)}$, usw.

Bei den Kurven $y = f(x)$ und $y = a\{f(x)\}^n$ erhält man offenbar die Beziehung $St_1 = n St_2$ zwischen ihren Subtangenten St_1 bzw. St_2.

11. Man zeige, daß bei den Kurven $y = f(x)$ und $y = \sqrt{a \pm f^2(x)}$ entsprechende Punkte von gleicher Abszisse Subnormalen haben, die von gleicher Lange, aber gleicher oder entgegengesetzter Richtung sind, je nachdem in $\sqrt{a \pm f^2(x)}$ vor $f^2(x)$ das Plus- oder Minuszeichen steht.[1])

Für $y = f(x)$ wird $Sn = f(x) \cdot f'(x)$, für $y = \sqrt{a \pm f^2(x)}$ wird $Sn = \pm f(x) \cdot f'(x)$.

12. Hat man zwei Kurven $y = f(x)$, $y = g(x)$ und eine dritte Kurve mit der Gleichung $y = \sqrt{f(x) \cdot g(x)}$, so besteht zwischen den zu ent-

1) Vgl. G. Peano „Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale", Torino 1887, S. 93.

sprechenden Punkten von gleicher Abszisse gehörigen Subtangenten St_f, St_g, St dieser Kurven die Beziehung[1])

$$\frac{1}{St} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{St_f} + \frac{1}{St_g}\right).$$

Für die dritte Kurve ist nämlich $\ln y = \frac{1}{2}(\ln f(x) + \ln g(x))$, daher

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right).$$

Auch diese Beziehung läßt sich natürlich zur Tangentenkonstruktion bei der Kurve $y = \sqrt{f(x) \cdot g(x)}$ benutzen, vorausgesetzt, daß man die Tangenten der Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ kennt. Die Subtangente St ist das harmonische Mittel von St_f und St_g.

Wäre außer $y = f(x)$ und $y = g(x)$ die Kurve $y = \sqrt[n]{f(x) \cdot g(x)}$ gegeben, so würde die gefundene Beziehung durch

$$\frac{1}{St} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{St_f} + \frac{1}{St_g}\right)$$

zu ersetzen sein.

13. Bei der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 - a^2 = 0$ ist die Länge der Normale eines Kurvenpunktes P so groß wie sein Radiusvektor, ein Satz, der in sofort ersichtlicher Weise zur Konstruktion der Normale benutzt werden kann.

Allgemein ist (S. 65) $N^2 = y^2 + y^2 y'^2$; im vorliegenden Fall wird $yy' = x$, daher $N^2 = x^2 + y^2$. Die Subnormale ist natürlich so groß wie die Abszisse von P.

14. Die Länge N der Normale eines Punktes P des Kegelschnitts $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ist gleich $\frac{b}{a}\sqrt{r_1 r_2}$, wo r_1 und r_2 die Längen der Brennstrahlen von P bedeuten.

Man findet

$$N = \frac{1}{a^2}\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2} = \frac{b}{a}\sqrt{\pm(a^2 - \varepsilon^2 x^2)},\ \text{wo}\ \varepsilon^2 = \frac{a^2 \mp b^2}{a^2}\ \text{ist,}$$

---

1) Vgl. G. Loria „Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven", deutsch bearb. von F. Schütte, Leipzig 1902, S. 711. Hier wird verwiesen auf De Lisleferme, Mathesis Bd. 3 (1883). Eine ähnliche Beziehung besteht, wenn die Zahl der Kurven größer ist. Sind z. B. die Kurven $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ und $y = \sqrt{f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)}$ gegeben, so findet die Beziehung statt $\frac{1}{St} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{St_f} + \frac{1}{St_g} + \frac{1}{St_h}\right\}$, daher ist St gleich dem mit $\frac{2}{3}$ multiplizierten harmonischen Mittel von St_f, St_g und St_h, denn man versteht unter diesem Mittel bei n Größen diejenige Größe, deren reziproker Wert das arithmetische Mittel der reziproken Werte der gegebenen Größen ist. Hieraus ergibt sich eine Tangentenkonstruktion für Punkte der Kurve $y = \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}$ oder $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$. Auch die Konstruktion der Tangenten von $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ ist hiermit unter Rücksicht auf das Ergebnis von Aufg. 10 erledigt.

und die oberen Vorzeichen dem Fall der Ellipse, die unteren dem Fall der Hyperbel zugehören. Der Ausdruck $\pm(a^2 - \varepsilon^2 x^2)$ oder $\pm(a + \varepsilon x)(a - \varepsilon x)$ ist aber gleich dem Produkt der zwei Brennstrahlen.

15. Für dieselben Kegelschnitte zeige man, daß das Produkt aus der Normale N eines Kurvenpunktes P und der Länge l des vom Mittelpunkt O der Kurve auf die Tangente von P gefällten Lotes konstant, nämlich gleich b^2, ist.

Mit Hilfe der Gleichung $\frac{x\xi}{a^2} \pm \frac{y\eta}{b^2} - 1 = 0$ der Tangente folgt $l = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}$, andererseits ist $N = \frac{1}{a^2}\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}$.

16. Bei der Archimedischen Spirale $r = a\vartheta$ ist die Polarsubnormale konstant, nämlich gleich a.

17. Nach Aufg. 23, S. 51 liegen die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem Punkt $P_1(x_1, y_1)$ an die logarithmische Spirale $r = a^{\vartheta}$ ziehen kann, auf einem durch P_1 und den Pol O der Spirale gehenden Kreis. Man zeige nun, daß der Durchmesser dieses Kreises so groß ist wie die Polarnormale desjenigen Punktes P_2 der Spirale, dessen Radiusvektor gleich OP_1 ist. Der Radius des vorerwähnten Kreises ist, wie die Lösung von Aufg. 23, S. 51, zeigt, gleich $\frac{1}{2}\sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2)\{1 + (\ln a)^2\}}$.

Der Durchmesser des Kreises, auf dem nach Aufg. 23, S. 51, die Fußpunkte der von P_1 nach der logarithmischen Spirale gezogenen Normalen liegen, ist, wie leicht zu zeigen, so groß wie die Polartangente des erwähnten Punktes P_2.

18. Bei den Kurven $r = f(\vartheta)$ und $r = \frac{af(\vartheta)}{a + f(\vartheta)}$ haben solche Punkte, die auf einem und demselben, durch den Koordinatenanfang gezogenen Strahl liegen, gleich große Polarsubtangenten.

Nach S. 66 ist $St = \frac{r^2}{r'}$; für die zweite Kurve wird $r' = \frac{a^2 f'(\vartheta)}{\{a + f(\vartheta)\}^2}$, daher $\frac{r^2}{r'} = \frac{f^2(\vartheta)}{f'(\vartheta)}$, also gerade so groß wie bei der ersten Kurve $r = f(\vartheta)$.

19. Es sei eine feste Gerade g und im Abstand a von g ein fester Punkt O gegeben. Durch O lege man einen beliebigen Strahl, der g in S trifft, und trage von S aus auf diesen Strahl nach beiden Seiten eine Strecke von gegebener Länge m, ab; alsdann bildet der geometrische Ort der Endpunkte P und Q dieser Strecken die *„Konchoide des Nikomedes“* (Fig. 29). In Polarkoordinaten r, t hat diese Kurve die Gleichung $r = \frac{a}{\sin t} \pm m$, wenn O zum Pol des Koordinatensystems und eine durch O parallel zu g gezogene Gerade zur Polarachse gewählt wird. Es soll nun gezeigt werden, daß man die Polar-

subnormalen von P und Q so erhält: Man fällt von S auf die Polarachse das Lot; die Verlängerung dieses Lotes trifft die rechtwinklig zum Radiusvektor QOP durch O zu ziehende Gerade im Endpunkt N der Polarsubnormale von P und Q. Die Normalen dieser Kurvenpunkte sind alsdann die Geraden PN uud QN.

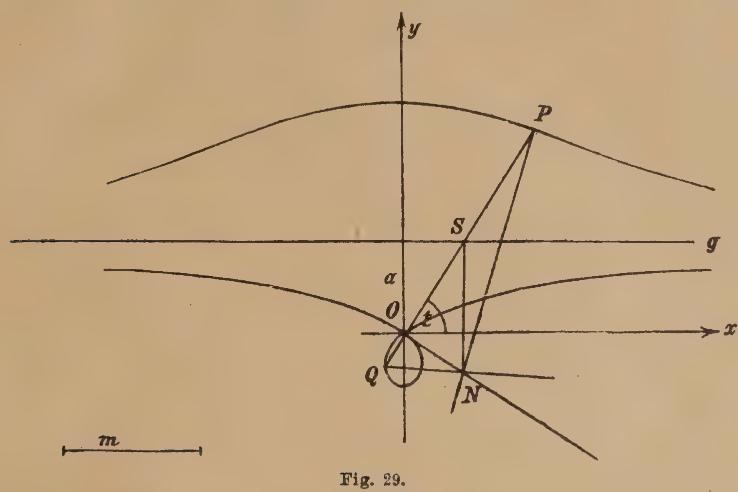


Fig. 29.

Folgt sofort aus dem Wert $r' = -\frac{a \cos t}{\sin^2 t}$ für die Polarsubnormale, der von m unabhängig ist, somit auch der Geraden g zugehört, die als dem Wert $m = 0$ entsprechende Ausartung einen speziellen Fall der Konchoide bildet.

20. Man zeige ferner, daß bei der Konchoide des Nikomedes die Endpunkte sämtlicher Polarsubnormalen eine Parabel erfüllen, die den festen Punkt O zum Scheitel und die Polarachse zur Scheiteltangente hat.

Die Koordinaten des Endpunktes N der Polarsubnormale sind $x = \frac{a \cos t}{\sin t}$, $y = -\frac{a \cos^2 t}{\sin^2 t}$, und hieraus folgt $x^2 = -ay$, die Gleichung einer Parabel von der angegebenen Lage. Sie ist übrigens von m unabhängig, gehört daher zu allen Konchoiden, bei denen g und O dieselbe Lage haben.

§ 12.

Ausdrücke, die in unbestimmter Gestalt auftreten.

1. Wenn der Quotient $f(x) \equiv \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ zweier Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ dadurch die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ erhält, daß für einen gewissen Wert $x = a$ sowohl $\varphi(x)$ als auch $\psi(x)$ gleich Null oder

gleich unendlich wird, so versteht man unter dem wahren Wert der Funktion $f(x)$ für $x = a$ den Grenzwert $f(a) = \lim\limits_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, falls überhaupt ein solcher vorhanden ist. Dieser Wert wird gefunden, indem man in $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ Zähler und Nenner für sich differenziert und dann $x = a$ setzt. Sollte nun nochmals eine solche Unbestimmtheit auftreten, so ist das Verfahren zu wiederholen, usw.

2. Der Fall, daß $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \psi(x)$ für $x = a$ die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ annimmt, indem $\varphi(a) = 0$, $\psi(a) = \infty$ wird, ist auf den vorhergehenden dadurch zurückgeführt, daß man z. B. an Stelle von $\varphi(x)$ setzt $1 : \frac{1}{\varphi(x)}$, wodurch die Form $\frac{\infty}{\infty}$ entsteht. Man könnte natürlich in $f(x)$ gerade so gut an Stelle von $\psi(x)$ setzen $1 : \frac{1}{\psi(x)}$ und erhielte alsdann die Form $\frac{0}{0}$.

3. Nimmt die Differenz $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \frac{\chi(x)}{\omega(x)}$ für $x = a$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$ an, so macht man beide Brüche gleichnamig und erhält dann $\frac{0}{0}$.

4. Nimmt der Ausdruck $f(x) \equiv \varphi(x)^{\psi(x)}$ für $x = a$ eine der Gestalten 0^0, ∞^0 oder 1^∞ an, so wird $\ln f(x) = \psi(x) \cdot \ln \varphi(x)$ von der Form $0 \cdot \infty$ und hiermit die Bestimmung von $\varphi(x)^{\psi(x)} = e^{\psi(x) \cdot \ln \varphi(x)}$ auf einen früheren Fall zurückgeführt.

5. Auch durch Entwicklung in eine nach Potenzen von $x - a$ ansteigende Reihe lassen sich die Werte der in unbestimmter Form auftretenden Ausdrücke bestimmen. Vgl. hierzu den Schluß von § 13 (S. 95).

Beispiele.

1. $f(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$ $\qquad f(3) = \frac{0}{0} = \frac{4}{5}$
2. $f(x) = \frac{a^x - b^x}{x}$ $\qquad f(0) = \frac{0}{0} = \ln \frac{a}{b}$
3. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ $\qquad f(0) = \frac{0}{0} = 2$
4. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ $\qquad f(\infty) = \frac{\infty}{\infty} = \infty$
5. $f(x) = \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 2x}$ $\qquad f(0) = \frac{\infty}{\infty} = 1$
6. $f(x) = \frac{x^4 - 16}{+\sqrt{38 - x} - 6}$ $\qquad f(2) = \frac{0}{0} = -384$
7. $f(x) = \frac{\ln \cos x}{x}$ $\qquad f(0) = \frac{0}{0} = 0$

8. $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 21x + 45}{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}$ $f(3) = \frac{0}{0} = 8$

9. $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$ $f(0) = \frac{0}{0} = \frac{1}{6}$

10. $f(x) = (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ $f(1) = 0 \cdot \infty = \frac{2}{\pi}$

11. $f(x) = (1 - \sin x) \operatorname{tg} x$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \infty = 0$

12. $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2 - 1}$ $f(1) = \infty - \infty = \frac{1}{2}$

13. $f(x) = x^x$ $f(0) = 0^0 = 1$

14. $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{\ln x}}$ $f(\infty) = \infty^0 = e$

15. $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ $f(1) = 1^\infty = \frac{1}{e}$

16. In Aufg. 42, S. 6 wurde gefunden:

$$1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \cdots + n^2 x^{n-1} = \frac{x^n \{n^2 x^2 - (2n^2 + 2n - 1)x + (n+1)^2\} - x - 1}{(x-1)^3}.$$

Aus dieser Formel leite man durch die Annahme $x = 1$ eine Formel für die Summe der Quadrate der n ersten ganzen Zahlen ab.

Man findet

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

17. Man denke sich den zum Zentriwinkel $AOQ = t$ gehörigen Bogen AQ eines Kreises vom Radius a von A aus auf die in A gezogene Tangente abgetragen ($\widehat{AQ} = \overline{AP}$). Nach welchem Punkt der Geraden OA (x-Achse) konvergiert der Schnittpunkt B der Geraden PQ und AO für $\lim t = 0$?[1]) (Fig. 30).

Die Gerade PQ trifft die x-Achse an der Stelle

$$x = \frac{a(\sin t - t \cos t)}{\sin t - t},$$

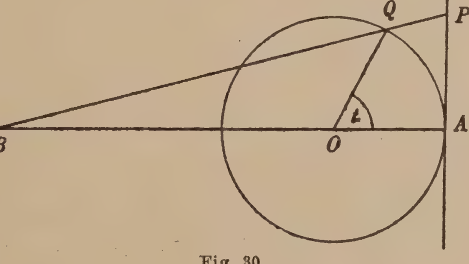


Fig. 30.

und nun ist der Wert dieses Ausdrucks für $t = 0$ zu bestimmen. Man findet den Punkt $x = -2a$.

Dieser Punkt kann zu einer sehr bequemen angenäherten Rektifikation des Kreisbogens $\widehat{AQ}$ benutzt werden, indem die Strecke AP von diesem Bogen umsoweniger abweicht, je kleiner der Winkel t

1) Vgl. O. Schlömilch, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 2 (1857), S. 330f., sowie G. Scheffers, „Lehrbuch der Mathematik“, Leipzig 1905, S. 518.

ist; aber selbst wenn t schon etwa 65^0 ist, beträgt der begangene Fehler noch etwas weniger als 1 %.

18. Man zeige, daß $\ln k$ als Grenzwert des Ausdrucks $x(\sqrt[x]{k}-1)$ für $\lim x = \infty$ aufgefaßt werden kann.

19. Für den Punkt $x = a$, $y = 0$ der Kurve

$$(x^2 - a^2)^2 + by^3 - c^2y^2 = 0$$

bilde man die Ableitung.

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{4x(x^2-a^2)}{y(3by-2c^2)}\right]_{\substack{x=a\\y=0}} = \frac{0}{0} = -\left[\frac{12x^2-4a^2}{(6by-2c^2)\frac{dy}{dx}}\right]_{\substack{x=a\\y=0}}$$

oder also $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4a^2}{c^2}$, $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{2a}{c}$, somit ergeben sich zwei Werte: der Punkt ist Kreuzungspunkt zweier Kurvenzweige, ein sogenannter Doppelpunkt. Vgl. hierzu § 15.

20. Beispiele zur Bestimmung der wirklichen Werte der in unbestimmter Form auftretenden Ausdrücke mit Hilfe von Reihenentwicklungen finden sich am Ende des nächsten Paragraphen (S. 95).

§ 13.
Unendliche Reihen.

1. Unter einer *unendlichen Reihe* versteht man eine unbegrenzte Aufeinanderfolge von Größen $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, u_{n+1}, \ldots$, die nach einem bestimmten Gesetz gebildet und additiv miteinander verbunden sind. Dieses Gesetz muß erkennen lassen, wie irgend ein „Glied" der Reihe, z. B. das n^{te} Glied u_{n-1}, gebildet ist.

Die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n + \cdots$$

heißt *konvergent*, wenn die Summe $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ ihrer n ersten Glieder für $\lim n = \infty$ einer Zahl S zustrebt, die eindeutig bestimmt und endlich ist; diese Zahl S heißt die Summe der Reihe. Gibt es keine Zahl S von der genannten Beschaffenheit, so heißt die Reihe *divergent*. Diese Definitionen gelten auch noch, wenn die Glieder der Reihe komplexe Größen sind, doch setzen wir *vorläufig* diese Glieder als reell voraus.

2. Haben die Glieder einer Reihe beliebige Vorzeichen, so ist sie konvergent, wenn die aus den absoluten Beträgen der Glieder gebildete Reihe konvergiert, und dies ist der Fall, wenn der aus den absoluten Beträgen $|u_n|$ und $|u_{n-1}|$ eines Gliedes und des vorhergehenden Gliedes gebildete Quotient $|u_n| : |u_{n-1}|$ für $\lim n = \infty$ einen Grenzwert $|\alpha|$ erreicht, der < 1 ist; die Reihe divergiert, falls $\alpha > 1$ ist (Konvergenzkriterium von Cauchy). Im Fall $\alpha = 1$ versagt

dieses Kennzeichen und man hat zur Prüfung der Konvergenz andere Wege einzuschlagen.

3. Eine unendliche Reihe, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind (alternierende Vorzeichen haben), ist konvergent, wenn diese Glieder von einer bestimmten Stelle an, absolut genommen, beständig abnehmen.

4. Eine aus positiven und negativen Gliedern gebildete Reihe heißt *unbedingt* oder *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n-1}| + |u_n| + \cdots$$

der absoluten Beträge ihrer Glieder konvergent ist. Falls jedoch die aus den absoluten Beträgen gebildete Reihe divergiert, heißt die gegebene Reihe *bedingt konvergent*, falls sie überhaupt konvergiert. Die Summe einer solchen Reihe ist von der Anordnung ihrer Glieder abhängig, sie kann durch entsprechende Umstellung jeder beliebigen Zahl S gleich gemacht werden; die Summe einer unbedingt konvergenten Reihe ebenso wie die Summe einer konvergenten, nur aus positiven Gliedern bestehenden Reihe bleibt jedoch unverändert, wenn man die Glieder in beliebiger Weise umstellt.

5. Eine unendliche Reihe ist konvergent, wenn die absoluten Beträge ihrer Glieder u_i von einem endlichen Index n ab kleiner sind als die entsprechenden Glieder einer anderen Reihe, deren Konvergenz feststeht.

6. Es sei eine unendliche Reihe von reellen Funktionen der Veränderlichen x

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n + \cdots$$

gegeben, und die Glieder $u_0, u_1, \ldots$ seien innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches eindeutig, endlich und stetig. Diese Reihe sei im Intervall $x_0 < x < X$ konvergent und $S(x)$ ihre Summe. Ferner werde die Summe der $n+1$ ersten Glieder $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ gleich $s_n(x)$ gesetzt und $S(x) = s_n(x) + r_n(x)$, es sei also $r_n(x)$ der vom Glied u_{n+1} an genommene Rest der Reihe $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$. Läßt sich alsdann zu einer vorgegebenen beliebig klein gewählten positiven Größe ε eine Zahl m bestimmen, so daß für *jedes* dem genannten Intervall angehörige x und für *jedes* $n \geqq m$ die Ungleichung $|r_n(x)| < \varepsilon$ gilt, so ist die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n + \cdots$ konvergent und heißt *gleichmäßig konvergent* in jenem Intervall.

Eine Reihe konvergiert z. B. gleichmäßig innerhalb eines Intervalles, so lange die absoluten Werte ihrer Glieder kleiner sind als die entsprechenden Glieder einer konvergenten Reihe.

Eine *Potenzreihe* $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \cdots$, die für einen gewissen Wert x konvergent ist, konvergiert gleichmäßig in dem ganzen Intervall von 0 bis x und stellt daher in demselben eine stetige Funktion von x dar.

7. Dieser Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz* ist z. B. wichtig zur Beurteilung der Frage, ob die gliedweise Differentiation einer aus den Funktionen u_i gebildeten unendlichen Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n + \cdots$, die innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches konvergiert und eine Funktion $f(x)$ zur Summe hat, eine Reihe ergibt, die die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ zur Summe hat. Dies ist wirklich der Fall, wenn die abgeleitete Reihe gleichmäßig konvergiert.

8. Wenn die Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \cdots$$

für alle Werte von x, die einem gewissen Intervall $x_0 < x < X$ angehören, konvergiert und die Funktion $f(x)$ zur Summe hat, sind die aus den ersten, zweiten, ... Ableitungen dieser Reihen gebildeten Reihen in dem gleichen Intervall konvergent und haben die Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, ... von $f(x)$ zur Summe. Konvergiert die vorgelegte Reihe auch für eine oder für beide Grenzen x_0, X des Intervalles, so hat dies noch nicht die Konvergenz der abgeleiteten Reihe für diese Grenzen zur Folge; aber so lange diese Ableitung konvergiert, gilt gleiches auch von der ursprünglichen Reihe.

9. Eine Funktion von x kann innerhalb eines gegebenen Intervalles nur auf eine Art in eine Potenzreihe entwickelt werden.

10. Satz von Taylor: Wenn die Funktion $f(x)$ nebst ihren n ersten Ableitungen in dem Intervall von x bis $x+h$ einschließlich der Grenzen stetig ist und daselbst bestimmte endliche Werte hat, gilt die Entwicklung:

$$(1)\quad f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

und hier ist das sogenannte Restglied R_n nach O. Schlömilch und E. Roche gegeben durch:[1])

$$(2)\qquad R_n = \frac{h^n (1-\vartheta)^{n-p}}{p \cdot (n-1)!} f^{(n)}(x + \vartheta h),$$

wobei p eine beliebige positive ganze Zahl, ϑ einen ganz bestimmten, seinem genauen Wert nach jedoch unbekannten positiven echten Bruch bedeutet. Für $p = n$ geht dieser Ausdruck R_n über in die nach Lagrange benannte Restform

$$(3)\qquad R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \vartheta h),$$

für $p = 1$ in die nach Cauchy benannte Form des Restes

$$(4)\qquad R_n = \frac{h^n (1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x + \vartheta h).$$

---

1) Vgl. O. Schlömilch, „Handbuch der Differential- und Integralrechnung“, 1. Teil, Greifswald 1847, S. 174—180, sowie Journ. de math., 2. Serie, Bd. 3, S. 384 (1858) und E. Roche, Journ. de math., 2. Serie, Bd. 3, S. 271 (1858).

Natürlich bedeutet ϑ in diesen drei Formen des Restes nicht dieselbe Größe, aber stets ist $0 < \vartheta < 1$.

Wenn überdies R_n mit wachsendem n gegen Null konvergiert, läßt sich die Funktion $f(x+h)$ in eine unendliche *„Taylorsche Reihe“* entwickeln derart, daß

$$(5)\qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \cdots.$$

Benutzt man statt x und $x+h$ die Bezeichnungen x_0 und x, so daß h die Differenz $x - x_0$ bedeutet, so wird

$$(6)\qquad f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + \cdots.$$

11. Satz von Maclaurin: Wenn die Funktion $f(x)$ nebst ihren n ersten Ableitungen in dem Intervall von 0 bis x einschließlich der Grenzen stetig ist und daselbst bestimmte endliche Werte hat, gilt die Entwicklung:

$$(7)\quad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

und hier ist das Restglied R_n nach Lagrange gegeben durch

$$(8)\qquad R_n = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\vartheta x),$$

nach Cauchy durch

$$(9)\qquad R_n = \frac{x^n(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\vartheta x).$$

Wenn auch noch R_n mit wachsendem n gegen Null konvergiert, läßt sich die Funktion $f(x)$ in eine unendliche *„Maclaurinsche Reihe“* entwickeln derart, daß

$$(10)\qquad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots.$$

Diese Reihe folgt auch aus (6) durch die Substitution $x_0 = 0$.

Die Bemerkung, daß bei Anwendung der Taylorschen oder Maclaurinschen Reihe $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ sein muß, zeigt, daß die Konvergenz dieser Reihen allein noch keineswegs ihre wirkliche Gültigkeit zur Folge hat. Hierauf hat schon Cauchy hingewiesen, und tatsächlich hat A. Pringsheim völlig einwandfreie Beispiele von konvergenten Maclaurinschen Reihen gegeben, die keineswegs mit der Funktion $f(x)$,

deren Differentialquotienten bei Ableitung der Reihe benutzt wurden, übereinstimmen.[1])

12. Da $\lim\limits_{n=\infty} \frac{h^n}{n!} = 0$ ist, gelten die Taylorsche und Maclaurinsche Reihe insbesondere für solche Intervalle von x bis $x + h$, bzw. von 0 bis x, innerhalb deren $f^{(n)}(x)$ für jedes n (auch für $n = \infty$) eine endliche Größe ist; denn alsdann ist $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$.

13. Der Fehler, der begangen wird, wenn man eine konvergente unendliche Reihe an einer gewissen Stelle abbricht und alle folgenden Glieder vernachlässigt, läßt sich dadurch abschätzen, daß man diese Glieder in ein Restglied R_n zusammenfaßt und dessen Betrag nach einer der beiden Restformeln von Lagrange oder Cauchy abschätzt, oder dadurch, daß man die vernachlässigten Glieder mit einer konvergenten unendlichen geometrischen Reihe vergleicht. Insbesondere bei unendlichen Reihen mit alternierenden Vorzeichen der Glieder ist der begangene Fehler ein Bruchteil des Gliedes, vor dem man abgebrochen hat, vorausgesetzt natürlich, daß dies in dem Teil der Reihe geschehen ist, in dem die absoluten Beträge der Glieder fortwährend abnehmen.

14. Die aus *komplexen Gliedern* $w_k = u_k + iv_k$ gebildete unendliche Reihe

$$(11) \quad (u_0 + iv_0) + (u_1 + iv_1) + \cdots + (u_{n-1} + iv_{n-1}) + (u_n + iv_n) + \cdots$$

konvergiert nur dann und immer dann, wenn die beiden aus den reellen Bestandteilen gebildeten Reihen $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n + \cdots$ und $v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} + v_n + \cdots$ konvergieren. Haben diese Reihen die Summen U bzw. V, so ist $U + iV$ die Summe der Reihe (11).

Die Reihe (11) konvergiert unbedingt, wenn die aus den absoluten Beträgen $|w_k| = +\sqrt{u_k^2 + v_k^2}$ gebildete Reihe konvergiert.

15. Ist w eine Funktion $f(z)$ von $z = x + iy$, die durch eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten $c_k = a_k + ib_k$, nämlich durch

$$(12) \quad c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

dargestellt werden kann, oder mit anderen Worten: ist w eine *analytische Funktion* von z, so ist diese Reihe (12) nach (6) eine *Taylorsche Reihe*, da die Koeffizienten von (12) bestimmt sind durch:[2])

$$(13) \quad c_0 = f(z_0), \quad c_1 = f'(z_0), \quad c_2 = \frac{1}{2!} f''(z_0), \ldots, \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \ldots$$

Für $z_0 = 0$ wird (12) eine *Maclaurinsche Reihe*.

---

1) Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München, Bd. 22 (1892), S. 222 f., sowie Math. Annalen Bd. 42 (1892), S. 161 ff. Daselbst auch Kritik eines schon von Cauchy gegebenen Beispiels.

2) Bezüglich der Ableitung $f'(z)$ vgl. die Bemerkung in Aufg. 14, S. 28.

16. Wenn die Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n + \cdots$$

für $z = z_1$ konvergent ist, so konvergiert sie, und zwar gleichmäßig, auch für alle diejenigen Werte $|z| < |z_1|$, denen in der Ebene der komplexen Zahlen Punkte *innerhalb* des um den Nullpunkt als Mittelpunkt beschriebenen und durch z_1 gehenden Kreises entsprechen.

17. Taylorscher Satz für Funktionen von zwei Veränderlichen. Ist die Funktion $z = f(x, y)$ nebst allen ihren Ableitungen bis zu denen n^{ter} Ordnung einschließlich eindeutig und stetig innerhalb eines gewissen Bereiches der unabhängigen Veränderlichen x, y, so besteht die Reihenentwicklung:

$$(14)\quad \begin{aligned} f(x+h, y+k) = f(x, y) &+ \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}\left\{h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right\}^{n-1} f + R_n. \end{aligned}$$

Hierbei ist das Restglied R_n von der Form $\frac{1}{n!}\left\{h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right\}^n f_{\substack{x+\vartheta h \\ y+\vartheta k}}$ und die geschweiften Klammern bei R_n und dem in (14) vorausgehenden Glied sollen andeuten, daß die Potenzen symbolisch aufzufassen sind, indem bei ihrer Entwicklung nach dem binomischen Lehrsatz z. B. das Produkt $\binom{n}{\alpha}\left(h\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-\alpha} \cdot \left(k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha} f$ zu ersetzen ist durch $\binom{n}{\alpha} h^{n-\alpha} k^{\alpha} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\alpha} \cdot \partial y^{\alpha}}$. Die Größe ϑ ist ein gewisser, seinem genauen Wert nach jedoch unbekannter positiver echter Bruch, und die Indizes $x + \vartheta h$, $y + \vartheta k$ in dem Ausdruck für R_n bedeuten, daß daselbst x, y durch $x + \vartheta h$, $y + \vartheta k$ zu ersetzen sind.

Man erhält eine unendliche *Taylorsche Reihe*, wenn $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ ist.

Ersetzt man in der *Taylor*schen Reihenentwicklung x und y durch Null, h und k durch x bzw. y, so ergibt sich die *Maclaurinsche Reihenentwicklung* einer Funktion $f(x, y)$ nach Potenzen von x und y.

Die Verallgemeinerung auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen ist leicht ersichtlich.

Beispiele.

1. Aus $f(x) = x^3 - 7x^2 + 5x - 9$ bilde man $f(x + \frac{1}{10})$, angeordnet nach Potenzen von $\frac{1}{10}$.

$f(x + \frac{1}{10}) = x^3 - 7x^2 + 5x - 9 + \frac{1}{10}(3x^2 - 14x + 5) + \frac{1}{100}(3x - 7) + \frac{1}{1000}$.

2. Aus $f(x) = x^4 - 3x^2 - 7x + 5$ bilde man $f(x+3)$, angeordnet nach Potenzen von x.

$$f(x+3) = 38 + 83x + 51x^2 + 12x^3 + x^4.$$

3. Man entwickle $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 7$ nach Potenzen von $x - 2$.

$$f(x) = 5 + 20(x-2) + 19(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

Man entwickle bei Aufg. 4—10 die vorgelegten Funktionen in unendliche Reihen und gebe an, in welchen Intervallen diese Reihen konvergieren und die Funktionen wirklich darstellen.

4. $$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Diese Reihe konvergiert und gilt mit Rücksicht auf S. 78, Nr. 12 für jeden endlichen Wert von x.

5. $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$, wo a eine positive Zahl bedeutet.

Nach Aufg. 4 ist $a^x = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \cdots$.

6. $$f(x) = \mathfrak{Cof}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

7. $$f(x) = \mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

Zu diesen beiden Aufgaben vergleiche man auch Aufg. 6, S. 7. Der Gültigkeitsbereich ist der gleiche wie bei Aufg. 4. Man erkennt, daß $e^x = \mathfrak{Cof}\, x + \mathfrak{Sin}\, x$, $e^{-x} = \mathfrak{Cof}\, x - \mathfrak{Sin}\, x$ ist.

8. $$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

9. $$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

Weil $|\cos x| \leqq 1$ und $|\sin x| \leqq 1$ ist und weil alle Ableitungen von $\cos x$ und $\sin x$ wieder auf diese Funktionen zurückführen, gelten die Reihen in Aufg. 8 und 9 für alle endlichen Werte von x.

10. $$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert, so lange $-1 < x \leqq +1$ ist. Wir wollen uns daher auf dieses Intervall beschränken. Für das Restglied in der Form von Cauchy erhält man nach (9), S. 77 und unter Rücksicht auf Aufg. 4, S. 14:

$$R_n = \frac{x^n (1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+\vartheta x)^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{1+\vartheta x} \cdot \left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}.$$

So lange nun $|x| < 1$ ist, bleibt $\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}$ auch für beliebig große Werte von n endlich, ebenso ist $\frac{1}{1+\vartheta x}$ endlich, während $\lim_{n=\infty} x^n = 0$

ist. Für $|x| < 1$ wird also $\lim_{n=\infty} R_n = 0$. Im Fall $x = 1$ wird das Restglied in der Form von Lagrange:

$$R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \frac{1}{(1+\vartheta)^n},$$

und hier ist wieder $\lim_{n=\infty} R_n = 0$. Die Reihe für $\ln(1+x)$ gilt daher, wenn $-1 < x \leqq +1$ ist.

11. Man zeige, daß für $-1 < x < 1$ die Reihenentwicklung gilt:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right)$$

und leite hieraus durch die Substitution $x = \frac{h}{2N+h}$, wo h und N positive Zahlen sind, eine Reihe ab, die zur Berechnung von $\ln(N+h)$ dienen kann, falls $\ln N$ bekannt ist.

Die angeführte Formel folgt aus der Reihe für $\ln(1+x)$, wenn man hier x durch $-x$ ersetzt und nun beide Reihen voneinander subtrahiert. Dabei wird der Satz gebraucht, daß durch Addition oder Subtraktion entsprechender Glieder zweier konvergenter Reihen eine Reihe entsteht, deren Summe sich durch Addition bzw. Subtraktion der Summen der zwei gegebenen Reihen ergibt.

Die Substitution $x = \frac{h}{2N+h}$ liefert:

$$\ln(N+h) =$$

$$\ln N + 2\left\{\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+1} + \cdots\right\}.$$

Da ${}^{10}\log x$, wofür nach früherer Verabredung kürzer $\log x$ geschrieben werden möge, gleich $M \ln x$ ist, wenn unter M der Modul 0,4342944819 der gewöhnlichen Logarithmen verstanden wird, so ist

$$\log(N+h) =$$

$$\log N + 2M\left\{\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+1} + \cdots\right\}.$$

12. Es sei der Fehler f abzuschätzen, der gemacht wird, wenn man die letzte Reihe vor dem Glied mit dem Exponenten $2n+1$ abbricht.

Werden die Koeffizienten der Potenzen von $k = \frac{h}{2N+h}$ bei den vernachlässigten Gliedern sämtlich gleich $\frac{1}{2n+1}$ gesetzt, so ist der Fehler f kleiner als $\frac{2Mk^{2n+1}}{2n+1}(1 + k^2 + k^4 + \cdots)$ oder also

$$f < \frac{2Mk^{2n+1}}{(2n+1)(1-k^2)}.$$

13. Man berechne log 13 durch die Annahme $N = 10$, $h = 3$; dabei soll man schon nach dem *ersten* Glied der Klammer in Auf-

gabe 11 die Reihe abbrechen und sich über den begangenen Fehler orientieren.

Der Fehler f wird $< \frac{2M}{3} \cdot \left(\frac{3}{23}\right)^3 \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{3}{23}\right)^2} = \frac{2M \cdot 9}{(23^2-9)\,23} = \frac{9M}{5980}$ oder $f < \frac{4}{5980} < 0{,}00067$. Man findet $\log 13$ nahezu gleich $1 + \frac{6M}{23} = 1{,}1133$; in Wahrheit ist $1{,}1133 < \log 13 < 1{,}1133 + 0{,}00067$ und $\log 13 = 1{,}1139434 \cdots$.

14. Auf Grund der Formel in Aufg. 11 und mit Hilfe der Annahme $N = 1000$, $h = 24$ berechne man $\log 2$, breche vor dem (dritten) Glied mit dem Exponenten 5 ab und schätze den so entstehenden Fehler.

(1) $\log 1024 = \log 2^{10} = \log 1000 + 2M\left\{\frac{3}{253} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{253}\right)^3\right\}$, daher

$$\log 2 = 0{,}3 + \frac{2M}{10}\left\{\frac{3}{253} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{253}\right)^3\right\}; \tag{2}$$

der Fehler f ist $< \frac{2M}{50}\left(\frac{3}{253}\right)^5 \frac{1}{1-\left(\frac{3}{253}\right)^2}$ oder rund $< \frac{6}{10^{12}}$.

Es sei hierzu bemerkt: Da der Fehler f nur *abgeschätzt* werden kann, man also nur wissen will, daß f kleiner als eine gewisse abgerundete Zahl ist, darf man sich bei Berechnung dieser Zahl solche Erleichterungen erlauben, die die Zahl mäßig vergrößern. Man wird also oben z. B. $2M$ gleich 0,9 oder sogar gleich 1 setzen dürfen usf. Bei unserem Beispiel ist dann $f < \frac{1}{50} \cdot \frac{243}{253^3 \cdot 256 \cdot 250} < \frac{250}{50 \cdot 250^6} < \frac{6}{10^{12}}$. Der bei Berechnung von $\log 2$ auf Grund der Formel (2) auftretende Fehler würde also weniger betragen als sechs Einheiten der zwölften oder eine Einheit der elften Dezimale.

15. Aus der Reihe für $\ln(1+x)$ in Aufg. 10 leite man eine Reihe für $\ln x$ ab, indem man $1+x$ mit x bezeichnet und gebe für sie den Gültigkeitsbereich an.

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} + \cdots,$$

die Reihe gilt für $0 < x \leq 2$.

16. Man entwickle $\log \sin x$ in eine Reihe nach Potenzen von x, indem man zunächst beachte, daß $\frac{\sin x}{x} = 1 - \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \cdots\right) = 1 - \xi$ ist, und dann in der Formel für $\ln(1+x)$ die Größe x durch

$$-\xi = -\left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \cdots\right)$$

ersetze und die Glieder, bei denen x denselben Exponenten hat, sammele. Ist diese Umstellung der Glieder hier erlaubt und hat sie nicht

eine Änderung des Wertes der Reihe entsprechend Nr. 4, S. 75 zur Folge? Es werden nur die Glieder bis x^8 einschließlich verlangt.

Man erhält

$$\log \sin x = \log x - M\left(\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{180} + \frac{x^6}{2835} + \frac{x^8}{37\,800} + \cdots\right).$$

Die erwähnte Umstellung darf stattfinden, so lange $|\xi| < 1$ ist, denn alsdann konvergiert die Reihe für $\ln(1 - \xi)$ *unbedingt.* Diese Ungleichung ist aber sicher erfüllt, so lange die Größe $\frac{\sin x}{x}$, deren absoluter Wert nur für $x = 0$ die Einheit erreicht, sonst aber stets unter dieser Grenze bleibt, von Null verschieden und positiv ist, also in den Intervallen $0 < x < \pi$ und $-\pi < x < 0$. In diesen Intervallen konvergiert und gilt daher die Reihe, ebenso für $x = 0$, wo sie mit $\log\left[\frac{\sin x}{x}\right]_{x=0} = \log 1 = 0$ gleichbedeutend wird. Für die praktische Anwendung kommt natürlich nur das Intervall $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ in Betracht.

17. Die gleiche Aufgabe für $\log \cos x$.

Ähnlich wie bei Aufg. 16 findet man:

$$\log \cos x = -M\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \frac{17x^8}{2520} + \cdots\right).$$

Die Formel gilt für das Intervall $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

18. Man schätze unter Benutzung der Restformel von *Lagrange* den Fehler ab, der gemacht wird, wenn man $\sin(x + h) = \sin x + h \cos x$ setzt und das Gradmaß von h eine Minute ist.

Hier wird $f = -\frac{1}{2}h^2 \sin(x + \vartheta h)$; im ungünstigsten Fall wäre $|\sin(x + \vartheta h)|$ nahezu gleich 1, daher ist der absolute Wert des Fehlers $|f| < \frac{h^2}{2}$ oder $|f| < \frac{60 \cdot 60}{2 \cdot 206\,264{,}8^2}$, denn für h ist das zum Winkel $1'$ gehörige Bogenmaß einzutragen. Man findet $|f| < \frac{5}{10^8}$.

19. Man berechne $\sin 40^0$, breche aber die Reihe nach dem zweiten Glied ab und schätze den begangenen Fehler.

$$\sin 40^0 = x - \frac{x^3}{3!}, \text{ wo } x = \frac{40\pi}{180} = \frac{2}{9}\pi,\ f < \frac{x^5}{5!}$$

(nach Nr. 13, S. 78). Hier ist $x = \frac{2}{9}\pi < 0{,}7$, daher $f < \frac{0{,}7^5}{120}$; setzt man statt $0{,}7^2 = 0{,}49$ die Zahl $\frac{1}{2}$, so wird

$$f < \frac{0{,}7}{480} < \frac{0{,}7}{476} \text{ oder } f < \frac{1}{680} < 0{,}0015.$$

20. Es soll $\sin(x + h)$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen von h entwickelt und der Ausdruck für das Restglied R_n angegeben werden.

$$\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \cdots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}+x\right) + R_n,$$

wobei

$$R_n = \frac{h^n}{n!}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x+\vartheta h\right).$$

21. Man berechne $\cos 17^0 28' 50''$ auf drei Dezimalen genau.

In der Reihe für $\cos x$ ist hier x gleich 0,3051, wie aus einer Tabelle für die Länge der zu gegebenen Zentriwinkeln gehörigen Kreisbögen entnommen werden kann. Man findet

$$\cos x = 1 - \frac{0{,}0931}{2!} + \frac{0{,}0087}{4!} = 0{,}9538\cdots,$$

die folgenden Glieder der Reihe können vernachlässigt werden, denn der absolute Wert des hierdurch begangenen Fehlers ist $< 0{,}000\,0012$.

22. Den Fehler f abzuschätzen, der gemacht wird, wenn man den zum Zentriwinkel α gehörigen Bogen $\operatorname{arc}\alpha$ eines Kreises vom Radius r durch die zugehörige Sehne s ersetzt.

$$f = \operatorname{arc}\alpha - s = r\alpha - 2r\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\left(\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 2r\left\{\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!} - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^5\cdot\frac{1}{5!} + \cdots\right\}.$$

Es folgt $f < 2r\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}$ oder $\frac{f}{\operatorname{arc}\alpha} < \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$, in Prozenten von $\operatorname{arc}\alpha$ ist f kleiner als $\frac{50}{3}\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ Prozent, wo α das Bogenmaß des Winkels α bedeutet.

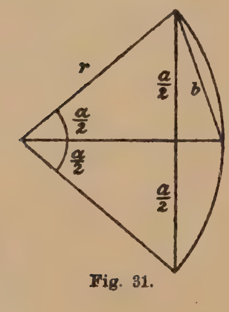


Fig. 31.

23. Ist a die Länge der zu einem Kreisbogen vom Zentriwinkel α und Radius r gehörigen Sehne, b die Länge der zum halben Kreisbogen gehörigen Sehne (vgl. Fig. 31), so ist die Länge des ganzen Kreisbogens $\operatorname{arc}\alpha$ nahezu gleich $\frac{1}{3}(8b-a)$. Man schätze den Fehler ab, der bei Anwendung dieser Formel begangen wird, wenn das Gradmaß des Winkels α entweder 30^0 oder 60^0 beträgt.

Es ist

$$\operatorname{arc}\alpha = r\alpha,\ a = 2r\sin\frac{\alpha}{2},\ b = 2r\sin\frac{\alpha}{4},$$

ferner

$$a = 2r\left\{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^5 - \cdots\right\},$$
$$b = 2r\left\{\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^5 - \cdots\right\},$$
$$8b - a = 2r\left\{\frac{3\alpha}{2} - \frac{3\alpha^5}{15\cdot 2^{10}} + \cdots\right\},$$

die Glieder mit α^3 heben sich weg. Es wird daher

$$\frac{8b-a}{3} = \operatorname{arc}\alpha\left\{1 - \frac{\alpha^4}{15 \cdot 2^9} + \cdots\right\} = \operatorname{arc}\alpha\left\{1 - \frac{\alpha^4}{7680} + \cdots\right\}.$$

Für den Winkel $\alpha = 30^0$ ist das zugehörige Bogenmaß $\frac{1}{6}\pi = 0{,}5236$; man findet den absoluten Wert des Fehlers $< 0{,}00001 \operatorname{arc}\alpha$, in Prozenten des Bogens beträgt der Fehler $0{,}001\,\%_0$. Für den Winkel $\alpha = 60^0$ ist das zugehörige Bogenmaß $\frac{1}{3}\pi = 1{,}0472$, der absolute Wert des Fehlers wird $< 0{,}000\,157 \operatorname{arc}\alpha$, in Prozenten des Bogens beträgt der Fehler $0{,}0157\,\%_0$.

24. Die Konvergenz der Reihe zu prüfen:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots.$$

Hier ist $\lim\limits_{n=\infty}\left[\frac{u_n}{u_{n-1}}\right] = \lim\limits_{n=\infty}\left[\frac{n-1}{n}\right]x = x$, für $|x| > 1$ divergiert also die Reihe, für $|x| < 1$ konvergiert sie. Im Fall $|x| = 1$ versagt das Kriterium von Cauchy; man findet Konvergenz für $x = -1$ (vgl. Nr. 3, S. 75), die Reihe wird für $x = 1$ zur sogenannten *harmonischen Reihe* $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$, deren Divergenz leicht zu beweisen ist. Sie führt den Namen harmonische Reihe, weil die Quotienten zweier aufeinander folgenden Glieder die musikalischen Intervalle darstellen. Gibt z. B. eine Saite von der Länge l einen bestimmten Ton, so gibt die Saite von der Länge $(\frac{1}{2} : 1)\,l = \frac{1}{2}\,l$ die obere Oktave dieses Tons, die Saite von der Länge $(\frac{1}{3} : \frac{1}{2})\,l = \frac{2}{3}\,l$ die Quint; hat die Saite die Länge $\frac{3}{4}\,l$, so gibt sie die obere Quart des ursprünglichen Tons, bei der Länge $\frac{4}{5}\,l$ die große Terz, bei $\frac{5}{6}\,l$ die kleine Terz.

25. Man untersuche die Konvergenz der Reihe:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots.$$

Für $u_{n-1} = \frac{1}{(n-1)n}$ wird $\lim\limits_{n=\infty}\left[\frac{u_n}{u_{n-1}}\right] = \lim\limits_{n=\infty}\left[\frac{n-1}{n+1}\right] = 1$, das Kriterium von Cauchy versagt also, es ist ein anderer Weg einzuschlagen. Wenn man beachtet, daß

$$u_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \cdots u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

so findet man für die Summe S_n der n ersten Glieder der Reihe den Wert $1 - \frac{1}{n+1}$, die Summe $S = \lim\limits_{n=\infty} S_n$ der ganzen Reihe wird daher gleich 1.

26. Die gleiche Aufgabe für die Reihe

$$\mathfrak{R}_k = \sum_1^\infty n^{-k} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^k} + \frac{1}{n^k} + \cdots.$$

Auch hier versagt das Kriterium von Cauchy. Für $k \leqq 1$ divergiert die Reihe; für $k > 1$ konvergiert sie, wie man folgendermaßen zeigen kann:

Es ist

$$\frac{1}{1^k} = \frac{1}{1^k},$$

$$2\frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k},$$

$$4 \cdot \frac{1}{4^k} > \frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Beim Summieren dieser Ungleichungen ergibt sich rechts die zu untersuchende Reihe $\mathfrak{R}_k$, links die für $k > 1$ konvergente geometrische Reihe[1])

$$1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^3 + \cdots.$$

27. Man zeige, daß die Reihe

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)} + \cdots.$$

konvergiert und bestimme ihre Summe.

Da die Glieder von S kleiner sind als die entsprechenden Glieder der für $n > 1$ nach Nr. 26 konvergenten Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$, so ist Konvergenz vorhanden. Zur Bestimmung der Summe schreibe man eine gewisse Reihe S_1 zweimal hin, nämlich in den beiden Formen

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+1)} + \cdots$$

und

$$S_1 = \qquad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} \qquad + \cdots.$$

Durch gliedweise Subtraktion folgt nun

$$S_1 - S_1 = 0 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} + \frac{1-n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} + \frac{1-n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)} + \frac{1-n}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)} + \cdots$$

oder

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} = (n-1)\,S, \quad \text{daher } S = \frac{1}{(n-1) \cdot (n-1)!}.$$

---

1) A. M. Legendre gibt in seinem „Traité des fonctions elliptiques" Bd. 2, Paris 1826, S. 432 eine Tabelle der Werte $\mathfrak{R}_k$ von $k = 2$ bis $k = 35$ auf 16 Dezimalen genau. T. J. Stieltjes gibt Acta math. Bd. 10 (1887), S. 299—302 eine Tabelle von $k = 2$ bis $k = 70$ auf 32 Dezimalen genau. Für $k = 2$ bis $k = 22$ und abgerundet auf 8 Dezimalen findet sich eine Tabelle auch bei J. A. Serret „Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung", 6. und 7. Aufl. neu bearbeitet von G. Scheffers, Bd. 2, Integralrechnung, Leipzig und Berlin 1921, S. 210.

28. Aus der für $-1 < x < +1$ konvergenten unendlichen Reihe

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

leite man durch Differentiation eine neue Reihe ab.

Die Differentiation ist nach Nr. 8, S. 76 erlaubt; sie ergibt

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Diese Reihe konvergiert für $-1 < x < 1$.

29. Aus der letzten Gleichung leite man durch Multiplikation mit x und darauf folgende Differentiation eine neue Reihe ab.

Es ergibt sich

$$1 + 4x + 9x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} + \cdots = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad -1 < x < 1.$$

30. Aus der für $-1 < x < 1$ konvergenten Reihe

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n \cdot x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1+x^2}$$

leite man durch Differentiation eine neue Reihe ab.

$$1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \cdots + (-1)^n \cdot (2n+1)x^{2n} + \cdots$$
$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad -1 < x < 1.$$

31. Zu zeigen, daß die sogenannte *hypergeometrische Reihe*

$$F(a, b, c, x) \equiv 1 + \frac{ab}{1 \cdot c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2$$
$$+ \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots,$$

in der a, b, c mit Ausschluß der ganzen negativen Zahlen und der Null beliebige Zahlenwerte darstellen, für $|x| < 1$ konvergiert. Auch zeige man, daß die aus $F(a, b, c, x)$ durch Differentiation nach x hervorgehende Reihe auf eine Funktion von derselben Art führt, indem

$$\frac{dF(a, b, c, x)}{dx} \text{ gleich } \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, x)$$

ist.[1])

Der bei der Anwendung des Konvergenzkriteriums von Cauchy zu bildende Quotient zweier einander folgender Glieder, z. B. der Glieder mit x^{n+1} und x^n, wird $\frac{ab + (a+b)n + n^2}{c + (1+c)n + n^2}x$, und dieser Ausdruck reduziert sich für $\lim n = \infty$ auf x.

32. Aus der Reihe für $\log \cos x$ (Auf. 17, S. 83) durch Differentiation die Reihe für $\operatorname{tg} x$ abzuleiten.

---

1) Die hypergeometrische Reihe findet sich schon bei Euler. Eingehender betrachtet wurde sie von Pfaff, Gauß, Kummer, Riemann, Schwarz, Klein. Näheres enthält z. B. das autographierte Vorlesungsheft von F. Klein „Über die hypergeometrische Funktion“, Göttingen 1894, woselbst man auch historische Bemerkungen und Literaturangaben findet.

Mit Rücksicht darauf, daß die Ableitung von $\log f(x)$ gleich $\frac{Mf'(x)}{f(x)}$ ist, findet man:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots.$$

Der Gültigkeitsbereich ist derselbe wie bei der Reihe für $\log\cos x$, nämlich $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$.

Die Koeffizienten der Reihe für $\operatorname{tg} x$ stehen in enger Beziehung zu den sogenannten *Bernoullischen Zahlen* B_{2n}; sie sind nach Jakob Bernoulli genannt, in dessen Wahrscheinlichkeitsrechnung („Ars conjectandi") sie zuerst vorkommen.

Die Reihe für $\operatorname{tg} x$ läßt sich nämlich schreiben:

$$\operatorname{tg} x = \frac{B_2 \cdot 2^2(2^2-1)}{2!}x + \frac{B_4 \cdot 2^4 \cdot (2^4-1)}{4!}x^3 + \frac{B_6 \cdot 2^6(2^6-1)}{6!}x^5 + \cdots$$
$$+ B_{2n} \cdot \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}x^{2n-1} + \cdots,$$

und hier sind die Bernoullischen Zahlen allgemein definiert durch:

$$B_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n-1} \cdot \pi^{2n}} S_{2n},$$

wobei

$$S_{2n} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots.$$

Die fünf ersten Bernoullischen Zahlen sind $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = \frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$. Alle Zahlen B_{2n} sind rational, da S_{2n} die Größe π^{2n} zum Faktor hat.

33. Ebenso leite man aus der Reihe für $\log\sin x$ (Aufg. 16, S. 83) durch Differentiation die Reihe für $\cot x$ ab.

$$\cot x = \frac{1}{x} - \left\{\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \cdots\right\}.$$

Die Reihe konvergiert und gilt für $-\pi < x < 0$ und $0 < x < \pi$.

Mit Benutzung der Bernoullischen Zahlen läßt sie sich in der Form schreiben:

$$\cot x = \frac{1}{x} - B_2 \cdot \frac{2^2 x}{2!} - B_4 \cdot \frac{2^4 x^3}{4!} - B_6 \cdot \frac{2^6 x^5}{6!} - \cdots.$$

34. Die Funktion $(1+x)^m$ in eine Reihe, die sogenannte *Binomialreihe*, zu entwickeln und ihren Gültigkeitsbereich anzugeben.

Man findet

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{n}x^n + \cdots,$$

wobei

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}.$$

Ist m eine *positive ganze* Zahl, so besteht die Reihe aus einer *endlichen* Anzahl $(m+1)$ von Gliedern, und dann gilt die Formel für alle Werte von x.

Ist aber m keine positive ganze Zahl, so ergibt die Entwicklung von $(1+x)^m$ eine unendliche Reihe, und das Konvergenzkriterium von Cauchy zeigt, daß die Reihe im Fall $|x|<1$ für beliebige Werte des Exponenten m unbedingt konvergiert, im Fall $|x|>1$ divergiert. Für $|x|=1$ versagt dieses Konvergenzkriterium. Es ist also nun zu untersuchen, ob in dem ganzen Intervall $-1 \leq x \leq 1$ die Funktion $(1+x)^m$ wirklich durch die Reihe dargestellt wird. Erforderlich ist hierzu nach Nr. 11, S. 77, daß das Restglied R_n für $\lim n = \infty$ verschwindet. Wir unterscheiden die *drei Fälle* $|x|<1$, $x=+1$ und $x=-1$.

I. Sei zunächst $|x|<1$. In der Form von Cauchy wird das Restglied:

$$R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}(1+\vartheta x)^{m-n}\cdot(1-\vartheta)^{n-1}\cdot x^n$$
$$= (1+\vartheta x)^{m-1}\cdot\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}\cdot m\cdot\binom{m-1}{n-1}\cdot x^n.$$

Hier ist nun $(1+\vartheta x)^{m-1}$ sicher eine endliche Größe; der Faktor $\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}$ ist gleichfalls endlich und konvergiert für $\lim n = \infty$ nach Null, da $\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}$ im Fall $|x|<1$ für positive und negative Werte von x einen echten Bruch darstellt. Auch der Faktor $\binom{m-1}{n-1}x^n$ konvergiert für $\lim n = \infty$ und $|x|<1$ nach Null. Wird nämlich $\binom{m-1}{n-1}x^n$ als Glied einer unendlichen Reihe aufgefaßt, deren nächstes Glied gleich $\binom{m-1}{n}x^{n+1}$ ist, so ist der Quotient dieser beiden Glieder gleich $\frac{m-n}{n}x$, und dieser Ausdruck reduziert sich für $\lim n=\infty$ auf $-x$, also auf einen echten Bruch, woraus hervorgeht, daß die angeführte Reihe konvergent ist und somit $\lim\limits_{n=\infty}\binom{m-1}{n-1}x^n$ für $|x|<1$ gleich Null sein muß. Im Fall $|x|<1$ ist daher $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ und die Binomialreihe gültig für beliebige Werte von m.

II. Im Fall $x=+1$ wird das Restglied in der Form von Lagrange:

$$R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}(1+\vartheta)^{m-n}.$$

Hier ist $\lim\limits_{n=\infty}[(1+\vartheta)^{m-n}] = \lim\limits_{n=\infty}\left[\left(\frac{1}{1+\vartheta}\right)^{n-m}\right] = 0.$ Der erste Faktor $\binom{m}{n}$ von R_n läßt sich in der Form schreiben:

$$\binom{m}{n} = (-1)^n \cdot \frac{(-m)(1-m)(2-m)\cdots(n-1-m)}{n!}$$
$$= \pm m\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\left(1-\frac{m+1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right).$$

Ist nun p die erste positive ganze Zahl $> m+1$ und naturgemäß $< n$, so wird

$$\binom{m}{n} = \pm m\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{p-1}\right)\left(1-\frac{m+1}{p}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right).$$

Hier ist das Produkt der $p-1$ ersten Faktoren selbstverständlich eine endliche Zahl. Was die übrigen Faktoren betrifft, so ist

$$\left(1-\frac{m+1}{p}\right) < \frac{1}{1+\frac{m+1}{p}},$$

wenn $m+1>0$, daher in diesem Fall

$$\left(1-\frac{m+1}{p}\right)\left(1-\frac{m+1}{p+1}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right) < \frac{1}{\left(1+\frac{m+1}{p}\right)\left(1+\frac{m+1}{p+1}\right)\cdots\left(1+\frac{m+1}{n}\right)}.$$

Da für den Nenner N dieses Ausdrucks die Ungleichung gilt:

$$N > \frac{m+1}{p} + \frac{m+1}{p+1} + \cdots + \frac{m+1}{n} \quad \text{oder} \quad N > (m+1)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

so wird für jedes positive ganze p und $\lim n = \infty$ nach Aufg. 24, S. 85, im Fall $m+1>0$, d. h. $m>-1$, der Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} N$ unendlich groß und somit

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(1-\frac{m+1}{p}\right)\left(1-\frac{m+1}{p+1}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\right] = 0,$$

daher auch $\lim\limits_{n=\infty}\binom{m}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$, so lange $m > -1$ ist.

Für $x=1$, $m=-1$ erhält man die nicht konvergente Reihe $1-1+1-1+\cdots$ und im Fall $x=1$, $m<-1$ wächst der absolute Wert von $\binom{m}{n}$ mit wachsendem n über jede Grenze, d. h. die Reihe für $(1+x)^m$ divergiert dann. Wenn $x=+1$ ist, gibt dagegen die Binomialformel eine für jeden Wert $m>-1$ gültige Darstellung von 2^m.

III. Es sei nun $x=-1$. In der Form von Cauchy wird hier das Restglied:

$$R_n = (-1)^n \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}(1-\vartheta)^{m-1}$$
$$= -m(1-m)\left(1-\frac{m}{2}\right)\left(1-\frac{m}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n-1}\right)\cdot(1-\vartheta)^{m-1}.$$

Auf Grund der Betrachtungen unter II. wird

$$\lim_{n=\infty}\left[(1-m)\left(1-\frac{m}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n-1}\right)\right] = 0,$$

so lange $m > 0$ ist; für jedes negative m hingegen wächst dieses Produkt mit n über jede Grenze. Da der Faktor $(1-\vartheta)^{m-1}$ in R_n jedenfalls endlich ist, wird $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ für $x = -1$ und $m > 0$. Natürlich ist jetzt Null der Wert der Reihe $(1+x)^m$. Im Fall $x = -1$, $m = 0$ nimmt $(1+x)^m$ die völlig unbestimmte Gestalt 0^0 an, während die Reihe die Zahl 1 liefert.

Die Ergebnisse zusammenfassend, kann man sagen:[1])

Die Binomialformel

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \cdots + \binom{m}{n} x^n + \cdots$$

gilt:

1) für jeden Wert von x, wenn m eine *positive ganze* Zahl ist; die Entwicklung besteht dann aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, nämlich aus $m+1$ Gliedern.

2) Die Formel gilt im Fall $|x| < 1$ für jeden Wert von m.

3) Sie gilt im Fall $x = 1$ für $m > -1$,

4) im Fall $x = -1$ für $m > 0$.

Auf folgende Tatsache sei noch hingewiesen: Ist m keine ganze Zahl, sondern ein positiver oder negativer, echter oder unechter Bruch mit dem ganzzahligen Nenner k, so ist $(1+x)^m$ eine k-wertige Funktion, denn die k^{te} Wurzel aus jeder von Null verschiedenen Zahl hat k verschiedene Werte. Es sei z. B. daran erinnert, daß $\sqrt[k]{1}$ die von einander verschiedenen Werte $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots \varepsilon^{k-1}$ hat, wo ε eine k^{te} Einheitswurzel bedeutet. Die Formel für $(1+x)^m$ stellt alsdann denjenigen Wert der mehrdeutigen Funktion $(1+x)^m$ dar, der für $x = 0$ gerade gleich $+1$ wird.

35. Wie läßt sich die Entwicklung von $(a+b)^m$, wo $|b| < |a|$ sei, auf die Binomialformel für $(1+x)^m$ im Fall $|x| < 1$ zurückführen?

Wird $\frac{b}{a} = x$ gesetzt, so geht $(a+b)^m$ in $a^m(1+x)^m$ über.

36. Den Ausdruck $\sqrt{1+x}$ in eine Reihe zu entwickeln.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots, \quad -1 \leqq x \leqq 1 \cdot$$

37. Die gleiche Aufgabe für

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots, \quad -1 \leqq x < 1.$$

1) N. H. Abel hat näher untersucht, welche Funktion durch die Reihe für $(1+x)^m$ dargestellt wird, wenn x und m komplexe Zahlen sind. Auch den Konvergenzbereich hat Abel bestimmt. Vgl. Journal für die reine und angewandte Math., Bd. 1 (1826), S. 311—339 = Œuvres complètes, hrsgg. von Sylow und Lie, Bd. 1, Christiania 1881, S. 219—250 = Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 71, hrsgg. von A. Wangerin.

38. Die gleiche Aufgabe für $\sqrt[3]{1+x}$.

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 + \cdots, \quad -1 \leqq x \leqq 1.$$

Bei den Aufgaben (36)—(38) wird durch die Reihe jedesmal der Wert der Wurzeln dargestellt, der für $x = 0$ gleich $+1$ ist. Vgl. die Bemerkung am Ende von Aufg. 34.

39. Man berechne durch Reihenentwicklung

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2^3 + 2} = 2\sqrt[3]{1 + \tfrac{1}{4}}$$

auf zwei Dezimalen genau und schätze den begangenen Fehler ab.

$$\sqrt[3]{10} = 2\left\{1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{144} + \frac{5}{5184} - \frac{5}{31104} + \cdots\right\}.$$

Da nur eine Genauigkeit von zwei Dezimalen verlangt wird, kann die Reihe vor dem Glied $\frac{2\cdot 5}{5184}$ abgebrochen werden; der begangene Fehler ist dann (vgl. Nr. 13, S. 78) kleiner als dieses Glied selbst, somit jedenfalls kleiner als 0,002. Man findet so

$$\sqrt[3]{10} = 2(1 + 0{,}0833 - 0{,}0069) + f = 2{,}153 + f, \text{ wo } f < 0{,}002.$$

Es werde daran erinnert, daß $\sqrt[3]{10}$ außer einem reellen Wert noch zwei konjugiert komplexe Werte hat; die Reihe stellt offenbar den reellen Wert dar.

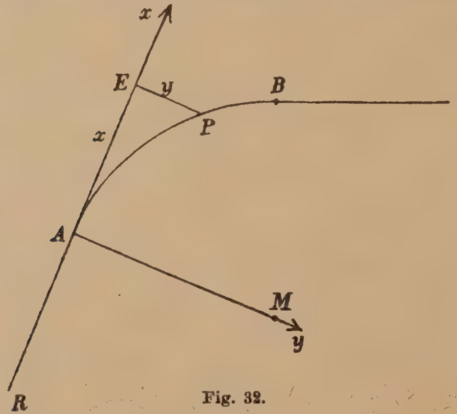


Fig. 32.

40. Die Mittellinie einer Landstraße soll von A nach B in einem Kreisbogen geführt werden und überdies bei A stetig in die Gerade AR, bei B stetig in die Gerade BS übergehen (Fig. 32). Man zeige, daß bei diesem Abstecken der Straße „*von der Tangente aus*" die zur Abszisse $x = AE$ gehörige Ordinate $y = EP$ des Punktes P des Kreisbogens angenähert durch $y = \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3}$ dargestellt werden kann, wenn r der Radius ist. Auch gebe man eine Grenze an, unter der der hierbei begangene Fehler liegt.

Bezogen auf A als Koordinatenanfang, AE als x-Achse, AM als y-Achse hat der Kreis die Gleichung $x^2 + y^2 - 2ry = 0$ oder $y = r \pm \sqrt{r^2 - x^2}$; für den von A ausgehenden Kreisquadranten ist bei $\sqrt{r^2 - x^2}$ das Minuszeichen zu setzen, man hat also

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} = r - r\left\{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$y = r\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{r}\right)^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{x}{r}\right)^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{x}{r}\right)^8 + \cdots\right\}.$$

Darf die Reihe vor dem dritten Glied abgebrochen werden, so wird $y = \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3}$.[1]) Für den hierbei begangenen Fehler f gilt offenbar die Ungleichung

$$f < \frac{1\cdot 3\cdot r}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{x}{r}\right)^6\left\{1 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^4 + \cdots\right\} \text{ oder } f < \frac{r}{16}\cdot\left(\frac{x}{r}\right)^6\cdot\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}.$$

Ebenso findet man beim Abstecken der kreisförmigen Mittellinie einer Straße *„von der Sehne aus“* (vgl. Fig. 33) angenähert

$$SP = h - y = h - \left(\frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3}\right).$$

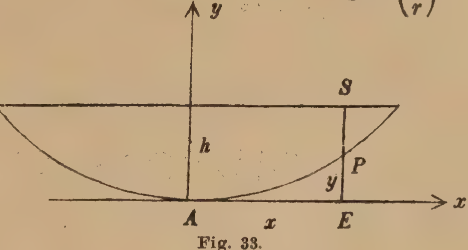


Fig. 33.

41. Die Funktion $y = f_5(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln.

Nach Nr. 13, S. 15 ist $f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{1}{2}\pi\right)$; da mit x auch y verschwindet, wird $f^{(n)}(0) = (n-1)!\sin\frac{n}{2}\pi$. Für geradzahlige Werte $n = 2m$ verschwindet dieser Ausdruck, für $n = 2m+1$ wird $\sin\frac{n}{2}\pi = (-1)^m$, somit $f^{2m+1}(0) = (-1)^m\cdot(2m)!$ Es ergibt sich daher:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^m\cdot\frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \cdots,$$

eine konvergente Reihe, so lange $-1 \leqq x \leqq +1$ ist. Leibniz kannte diese Reihe schon im Jahr 1674.

Nun muß man noch untersuchen, ob für alle Werte des Konvergenzbereiches das Restglied für $\lim m = \infty$ nach Null strebt. Die Reihe möge nach dem Glied mit x^{2m-1} abgebrochen werden; alsdann wird das Restglied in der Form von Lagrange:

$$R_{2m} = \frac{(-1)^m}{2m}\cdot\left(\frac{x^2}{1+\vartheta^2 x^2}\right)^m \sin(2m\operatorname{arc\,tg}\vartheta x),$$

wie mit Hilfe von $f^{(2m)}(x) = (2m-1)!\cos^{2m} y\cdot\sin 2m\left(y + \frac{1}{2}\pi\right)$ leicht

1) Eine Tabelle der zu gegebenen x und r gehörigen y findet sich z. B bei O. Sarrazin und H. Oberbeck im „Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen“, 16. Aufl., Berlin 1906, S. 123.

folgt, wenn man $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$ einführt und x durch ϑx ersetzt. Man erkennt sofort, daß für das ganze oben angegebene Intervall einschießlich der Grenzen $\lim_{m=\infty} R_{2m} = 0$ ist.

Übrigens sei daran erinnert, daß $\operatorname{arc\,tg} x$ unendlich viele Werte hat, denn es ist $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$, wo k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Die Reihe stellt den Wert dar, der für $x = 0$ gleich Null wird. Daher liegt der Arkus zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$. Für $x = 1$ wird $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{4}$, somit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

42. Zur Berechnung der Zahl π würde diese Reihe sehr ungeeignet sein, da sie zu langsam konvergiert. Eine Reihe von starker Konvergenz hat J. Machin im Jahr 1706 angegeben, indem er $\frac{1}{4}\pi = 4a + b$ setzte und hierbei $\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$ annahm; alsdann wird $\operatorname{tg} 4a = \frac{120}{119}$ und aus $1 = \operatorname{tg}(4a + b)$ findet man $\operatorname{tg} b = -\frac{1}{239}$. Welche Formel ergibt sich nun für π?

$$\pi = 16\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + \cdots\right\}$$
$$- 4\left\{\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{239^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{239^7} + \cdots\right\}.$$

43. Welche Reihe erhält man zur Berechnung von π, wenn man nach Euler $\frac{1}{4}\pi = a + b$ setzt und $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$ annimmt?

Man findet $\operatorname{tg} b = \frac{1}{3}$ und

$$\pi = 4\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} + \cdots\right\} + 4\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \cdots\right\}.$$

44. Die Funktion $f(x) = \arcsin x$ mit Hilfe der für sie gültigen Formel $(1 - x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$ (vgl. Nr. 21, S. 16) in eine unendliche Reihe zu entwickeln.

Für $x = 0$ nimmt die soeben erwähnte Formel die Gestalt an $f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0)$. Da nun $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ für $x = 0$ den Wert $+1$ (vgl. Nr. 2, S. 9), und $f''(x) = \frac{x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$ für $x = 0$ den Wert Null hat, so wird $f'''(0) = 1$, $f^{(V)}(0) = 3^2$, $f^{(VII)}(0) = 5^2 \cdot 3^2, \cdots f^{(2n+1)}(0) = (2n-1)^2(2n-3)^2 \cdots 5^2 \cdot 3^2$, während alle Ableitungen gerader Ordnung verschwinden. Die Anwendung der Maclaurinschen Reihe liefert:

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cdot 3^2 + \frac{x^7}{7!}\cdot 5^2\cdot 3^2 + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(2n-1)^2(2n-3)^2\cdots 5^2\cdot 3^2 + \cdots$$

oder

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots.$$

Das Konvergenzkriterium von Cauchy zeigt, daß diese Reihe für $-1 < x < 1$ konvergiert, für $|x| > 1$ divergiert. Auch für $x = \pm 1$ bleibt die Konvergenz bestehen, denn wenn man $x = 1$ setzt, ergibt sich die Reihe $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \cdots$; aber ihre Glieder, vom zweiten an gerechnet, sind kleiner als die Glieder der Reihe $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots$. Diese Reihe kommt vor, wenn man $\sqrt{1 + x}$ für $x = -1$ nach der Binomialformel entwickelt, sie ist nämlich gleich $1 - [\sqrt{1 + x}]_{x=-1} = 1$ und konvergiert daher.[1])

Übrigens ist auch hier eine ähnliche Bemerkung zu machen wie bei der in Aufg. 41 abgeleiteten Reihe für $\operatorname{arc\,tg} x$: die Funktion $\arcsin x$ hat unendlich viele Werte, da $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ ist, wo k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Die Reihe stellt den Wert von $\arcsin x$ dar, der für $x = 0$ gleich Null wird; daher liegt der Arkus in dem Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$.

45. Die Funktion $e^x \sin y$ der beiden Veränderlichen x und y in eine Maclaurinsche Reihe zu entwickeln.

Man findet

$$e^x \sin y = y + xy + \frac{1}{3!} y(3x^2 - y^2) + \frac{4xy}{4!}(x^2 - y^2) + \\ + \frac{1}{5!} y(5x^4 - 10x^2y^2 + y^4) + \cdots.$$

Wie am Schluß von § 12 bemerkt wurde, kann man mit Hilfe von Reihenentwicklungen häufig leicht die Grenzwerte der in unbestimmter Form auftretenden Ausdrücke bestimmen. Hierzu seien folgende Beispiele gegeben.

46. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$, man bestimme $f(0) = \frac{0}{0}$.

Hier ist (vgl. Nr. 8, S. 80)

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots\right) = \frac{1}{2!} + \delta,$$

wo δ eine mit x verschwindende Größe bezeichnet; daher wird $f(0) = \frac{1}{2}$.

47. $f(x) = \frac{a^{2x} - b^{3x}}{x}$, man bestimme $f(0) = \frac{0}{0}$.

---

1) Bezüglich des Nachweises, daß das Restglied R_n bei der Reihe für $\arcsin x$ im Intervall $-1 < x < 1$ nach Null konvergiert, sei auf W. Franz Meyer „Differentialrechnung" (Sammlung Schubert Nr. 10), Leipzig 1901, S. 305ff. verwiesen und für die Grenzfälle $x = \pm 1$ auf eine Abhandlung von L. Saalschütz, Archiv d. Math. u. Physik, 3. Reihe, Bd. 5 (1903), S. 196ff.

Hier ist (vgl. Nr. 5, S. 80)

$$f(x) = \left\{1 + 2x \ln a + \frac{(2x \ln a)^2}{2!} + \cdots - \left(1 + 3x \ln b + \frac{(3x \ln b)^2}{2!} + \cdots\right)\right\} : x$$
$$= 2 \ln a - 3 \ln b + \delta,$$

wo δ mit x verschwindet; folglich ist $f(0) = 2 \ln a - 3 \ln b$.

48. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$, man bestimme $f(0) = \infty - \infty$.

Hier ist

$$f(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2}{x^2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2} = \frac{x^4\left(\frac{2}{3!} + \delta\right)}{x^4(1 + \varepsilon)} = \frac{\frac{1}{3} + \delta}{1 + \varepsilon},$$

wo δ und ε mit x zugleich verschwinden; daher ist $f(0) = \frac{1}{3}$.

§ 14.

Konkavität und Konvexität. Wendepunkte.

1. Ist für irgend einen Punkt P einer Kurve $f(x, y) = 0$ die erste Ableitung $\frac{dy}{dx}$ oder $y' \neq 0$, während die folgenden Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ einschließlich verschwinden, aber $\frac{d^n y}{dx^n}$ oder $y^{(n)}$ einen von Null verschiedenen Wert hat, so kehrt bei geradem n die Kurve im Punkt P der positiven y-Achse die konkave oder konvexe Seite zu, je nachdem $y^{(n)}$ positiv oder negativ ist. Bei ungeradem n ist P ein *Wendepunkt* mit einer gegen die x-Achse geneigten Tangente (Wendetangente). Ist jedoch $y' = 0$, während wieder die folgenden Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ einschließlich verschwinden, aber $y^{(n)}$ von Null verschieden ist, so hat die Kurve bei geradem n und vertikal aufwärts gerichteter positiver y-Achse im Punkt P ein *Minimum* oder *Maximum*, je nachdem $y^{(n)}$ positiv oder negativ ist; bei ungeradem n ist P ein *Wendepunkt*[1]) mit einer zur x-Achse parallelen Tangente.

2. Sind für einen Kurvenpunkt die Werte y und y'' von Null verschieden, so kehrt die Kurve in diesem Punkt der x-Achse die

1) Mitunter bezeichnet man *alle* diejenigen Punkte P einer Kurve als Wendepunkte, für die die zweite Ableitung y'' verschwindet, ohne Rücksicht darauf, ob die nächste nicht verschwindende Ableitung von ungerader oder gerader Ordnung ist, also ohne Rücksicht darauf, ob wirklich in P ein Übergang von Konkavität in Konvexität stattfindet oder nicht. An solchen Stellen liegen *mindestens* drei aufeinanderfolgende Punkte der Kurve auf einer Geraden, der einer solchen Stelle zugehörige *Krümmungsradius* (vgl. § 18) ist unendlich groß. Ein eigentlicher *Wende*punkt liegt aber nur dann vor, wenn die Anzahl dieser einander folgenden Punkte ungerade ist; bei gerader Anzahl nennt man die betreffende Stelle mitunter einen *Flachpunkt* (uneigentlichen Wendepunkt).

konvexe oder konkave Seite zu, je nachdem y und y'' gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben ($y \cdot y''$ positiv oder negativ ist).

3. Die Wendepunkte einer algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung, die in homogenen Koordinaten die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ hat, liegen zugleich auf einer algebraischen Kurve $3(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung (Hesseschen Kurve), die die Gleichung hat:

$$H \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

wobei die Indizes 1, 2, 3 partielle Ableitungen nach x, y, z andeuten.[1]) Auch liegen auf dieser Kurve diejenigen Punkte von $f(x, y, z) = 0$, für die f_1, f_2 und f_3 verschwinden, Punkte, denen der nächste Paragraph gewidmet ist.

Beispiele.

1. Man zeige, daß die Kurve $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$ in ihrem im Endlichen gelegenen Schnittpunkt mit der y-Achse der positiven y-Achse die konvexe Seite zukehrt. Vgl. Fig. 2, S. 3.

y'' wird gleich -12, also negativ.

2. Zu zeigen, daß die Kurve $f(x, y) \equiv 6x^2 - 12xy + 5y^2 + 25 = 0$ im Punkt $x = 5$, $y = 5$ der positiven y-Achse die konkave Seite zukehrt.

Die zweite Ableitung $y'' = -\dfrac{f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2}{f_2^3}$ (vgl. Nr. 1, S. 36) wird gleich $\frac{6}{5} > 0$.

3. Zu zeigen, daß die Kurve $y = \sin x$ überall der x-Achse die konkave Seite zukehrt, abgesehen von ihren Schnittpunkten mit dieser Achse, die Wendepunkte sind. (Vgl. Fig. 6, S. 10).

Das Produkt $y \cdot y''$ ist gleich $-\sin^2 x$, also im allgemeinen negativ. Für die Schnittpunkte mit der x-Achse ist $y = 0$ und $y'' = 0$, $y''' \neq 0$.

4. Die Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ kehrt in ihrem ganzen Verlauf der x-Achse die konkave Seite zu.

$$yy'' = -\frac{b^2 + a^2 y'^2}{a^2} < 0.$$

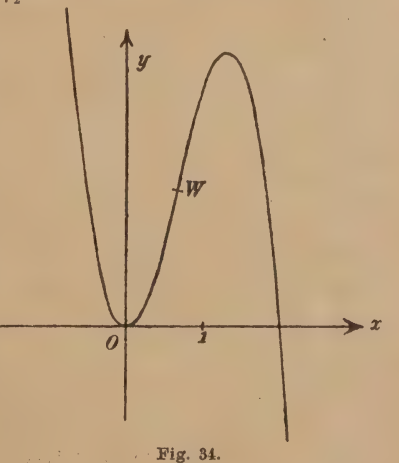
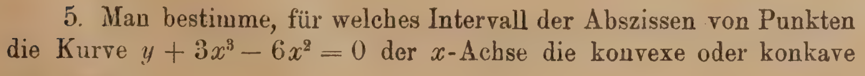


Fig. 34.



5. Man bestimme, für welches Intervall der Abszissen von Punkten die Kurve $y + 3x^3 - 6x^2 = 0$ der x-Achse die konvexe oder konkave

1) Hier sind unter Wendepunkten die eigentlichen *und* uneigentlichen Wendepunkte (Flachpunkte) verstanden.

Seite zukehrt, bestimme den Wendepunkt der Kurve und dessen Tangente (Fig. 34).

$y y'' = 18x^2(2-3x)(2-x)$. Für $-\infty < x < \frac{2}{3}$ ist die Kurve zur x-Achse konvex, für $\frac{2}{3} < x < 2$ konkav, für $2 < x < \infty$ konvex. Die Kurve berührt die x-Achse im Koordinatenanfang, schneidet sie an der Stelle $x = 2$, der Punkt $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{16}{9}$ ist ein Wendepunkt mit der Tangente $36\xi - 9\eta - 8 = 0$.

6. Durch welche Gleichung sind die Parameter t der Wendepunkte der Zykloide

$$x = at - b \sin t = \varphi(t), \quad y = a - b \cos t = \psi(t)$$

bestimmt? Vgl. auch Aufg. 7, S. 47.

Es soll $\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''$ verschwinden (vgl. Nr. 3, S. 36), während $y''' \neq 0$ ist, und diese Forderungen liefern $\cos t = \frac{b}{a}$, woraus hervorgeht, daß nur im Fall $b < a$ (bei der gestreckten Zykloide) Wendepunkte vorhanden sein können, nicht aber, wenn $b > a$ ist (bei der verschlungenen Zykloide). Dem Fall $b = a$ entspricht die gemeine Zykloide, die an den durch $\cos t = \frac{b}{a} = 1$ bestimmten Stellen sogenannte Rückkehrpunkte oder Spitzen hat (vgl. § 15). Figur 35 stellt diese drei verschiedenen Fälle dar.

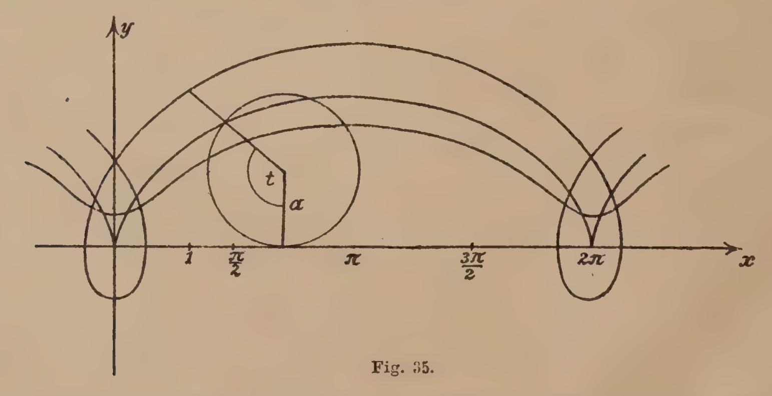


Fig. 35.

7. Bei der Kurve $y = f(x)$ soll mit Hilfe der Ableitungen y' und y'' die Bedingung dafür aufgestellt werden, daß die Kurve in einem Punkt P

a) der positiven x-Achse die konkave oder konvexe Seite zukehrt,

b) der y-Achse die konvexe oder konkave Seite zukehrt.

a) Die Kurve kehrt der positiven x-Achse die konkave Seite zu, wenn $\frac{d^2 x}{d y^2} > 0$ oder also wenn $-\frac{1}{y'^3} \cdot y'' > 0$ ist (vgl. Aufg. 9, S. 42). Da nur das Vorzeichen dieses Ausdrucks in Betracht kommt, kann

man auch sagen: die Kurve kehrt der positiven x-Achse die konkave oder konvexe Seite zu, je nachdem $y' \cdot y''$ negativ oder positiv ist.

b) Die Kurve kehrt der y-Achse die konvexe oder konkave Seite zu, je nachdem das Produkt $xy'y''$ negativ oder positiv ist.

8. Zu zeigen, daß die Parameter ϑ der Wendepunkte der durch eine Gleichung in Polarkoordinaten $r = f(\vartheta)$ gegebenen Kurve aus der Gleichung $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$ bestimmt werden.

Setzt man $x = r\cos\vartheta = \varphi(\vartheta)$, $y = r\sin\vartheta = \psi(\vartheta)$, so soll $\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''$ verschwinden; im vorliegenden Fall wird $\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'' = r^2 + 2r'^2 - rr''$.

9. Unter Benutzung dieses Ergebnisses zeige man, daß die Wendepunkte der Kurve $r = \frac{1}{f(\vartheta)}$ mit Hilfe von $f(\vartheta) + f''(\vartheta) = 0$ zu bestimmen sind, so lange $f\vartheta \cdot \sin\vartheta + f'(\vartheta)\cos\vartheta \neq 0$ ist.

Setzt man $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, so wird nunmehr

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\{f(\vartheta) + f''(\vartheta)\}\, f^3(\vartheta)}{\{f(\vartheta)\sin\vartheta + f'(\vartheta)\cos\vartheta\}^3}.$$

10. Die Gleichung der Hesseschen Kurve des Cartesischen Blattes

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

(Fig. 36) zu bilden.

Man erhält

$$x^3 + y^3 + axy = 0,$$

eine Gleichung, die aus der gegebenen entsteht, wenn x durch $-3x$ und y durch $-3y$ ersetzt wird. Die Hessesche Kurve läßt sich also aus dem gegebenen Cartesischen Blatt dadurch ableiten, daß man dieses um den Koordinatenanfang O um 180^0 dreht und von O aus auf ein Drittel verkleinert.

Fig. 36.

Weitere Aufgaben, insbesondere über Wendepunkte, finden sich in § 20.

§ 15.

Bestimmung von singulären Punkten bei ebenen Kurven.

1. Eine Kurve $f(x, y) = 0$ hat an der Stelle x, y einen singulären Punkt, wenn die Koordinaten x, y außer $f(x, y) = 0$ die Gleichungen $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ erfüllen. Hierbei wird noch vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x, y)$ eine eindeutige Funktion von x und y ist,

also z. B. x oder y nicht unter einem Wurzelzeichen auftreten.[1]) Die beiden Koordinaten x, y müssen also drei Gleichungen genügen, woraus hervorgeht, daß eine Kurve im allgemeinen keine singulären Punkte hat, vielmehr ist das Auftreten eines solchen Punktes an eine gewisse Relation zwischen den Koeffizienten von $f(x, y)$ gebunden

2. Wenn nicht auch noch die Ableitungen zweiter Ordnung f_{11}, f_{12}, f_{22} für das einem singulären Punkt zukommende Wertepaar x, y seiner Koordinaten verschwinden, so liegt ein *Doppelpunkt* (zweifacher Punkt) der Kurve vor und zwar

ein eigentlicher Doppelpunkt (Knotenpunkt), wenn $\Delta \equiv f_{12}^2 - f_{11} f_{22} > 0$,
ein Rückkehrpunkt (Spitze, stationärer Punkt), wenn $\Delta = 0$,
ein isolierter Punkt (Einsiedler), wenn $\Delta < 0$ ist.

Allerdings können im Fall $\Delta = 0$ auch höhere Singularitäten als nur ein Rückkehrpunkt auftreten.[2])

In einem Doppelpunkt treffen sich zwei Kurvenzweige, jeder von ihnen hat eine Tangente, und die Winkel α, die diese Tangenten mit der positiven Richtung der x-Achse bilden, ergeben sich aus der für $\operatorname{tg} \alpha$ quadratischen Gleichung

$$f_{22} \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 f_{12} \operatorname{tg} \alpha + f_{11} = 0.$$

Je nachdem $\Delta > 0$, $= 0$ < 0 ist, sind die beiden vom Doppelpunkt aus möglichen Fortschreitungsrichtungen auf der Kurve reell und verschieden, zusammenfallend oder konjugiert imaginär.

3. Stellt $f(x, y) = 0$ eine algebraische Kurve dar und wird die Funktion $f(x, y)$ mit Hilfe von z homogen gemacht, indem man x und y durch $x : z$ bzw. $y : z$ ersetzt und die Nenner entfernt, so lassen sich die Gleichungen $f(x, y) = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, die die Koordinaten eines Doppelpunktes erfüllen müssen, durch $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ ersetzen, wo f_3 die partielle Ableitung von $f(x, y, z)$ nach z bedeutet.

4. Eine Kurve hat an der Stelle x, y einen *dreifachen Punkt*, wenn die Koordinaten x, y nicht nur die Gleichungen $f(x, y) = 0$, $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$, sondern auch noch $f_{11} = 0$, $f_{12} = 0$, $f_{22} = 0$ erfüllen.

5. Der *Koordinatenanfang* ist ein Doppelpunkt einer algebraischen Kurve, wenn das absolute Glied und die linearen Glieder in der Gleichung der Kurve fehlen; die Gliedergruppe, die in x, y homogen vom

---

1) Beispielsweise hat die Kurve $F(x, y) \equiv y - (x - a)\sqrt{x - b} = 0$ an der Stelle $x = a$, $y = 0$ einen Doppelpunkt, die partiellen Ableitungen F_1 und F_2 verschwinden jedoch nicht für $x = a$, $y = 0$; wird aber die Gleichung der Kurve in die rationale Gestalt $f(x, y) \equiv y^2 - (x - a)^2 (x - b) = 0$ gebracht, so verschwinden f_1 und f_2 für $x = a$, $y = 0$.

2) Vgl. hierzu G. Salmon, „Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven“, deutsch bearb. von W. Fiedler, 2. Aufl. Leipzig 1882, S. 280—283; H. Wieleitner, „Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung“, Sammlung Schubert Nr. 43, Leipzig 1905, insbesondere § 28 und § 30—34.

zweiten Grad ist, stellt, gleich Null gesetzt, die beiden Doppelpunkttangenten dar. Fehlt auch diese Gliedergruppe, so ist der Koordinatenanfang ein dreifacher Punkt; die Gleichung, die sich durch Nullsetzen der Summe aller Glieder dritten Grades in x und y ergibt, zerfällt in die der drei Tangenten des Punktes.

6. Eine durch eine Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegebene Kurve hat an der Stelle x_0, y_0 einen Doppelpunkt, wenn die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ für zwei *verschiedene* Werte t_1 und t_2 des Parameters t dieselben Werte $x_0 = \varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $y_0 = \psi(t_1) = \psi(t_2)$ annehmen. Verschwinden für einen und denselben Wert t die Ableitungen $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$, so ist t der Parameter eines Rückkehrpunktes.

Beispiele.

1. Man untersuche, ob die Kurve $x^3 + 9x^2 - y^2 + 24x + 6y + 11 = 0$ einen Doppelpunkt hat und gebe, wenn dies der Fall ist, seine Koordinaten und die Gleichungen seiner Tangenten an (Fig. 37).

Man findet $x = -2$, $y = 3$; die Tangenten eines Doppelpunktes x, y sind allgemein bestimmt durch

$$(\eta - y)^2 f_{22} + 2(\xi - x)(\eta - y) f_{12} + (\xi - x)^2 f_{11} = 0,$$

im vorliegenden Fall durch

$$-2(\eta - 3)^2 + 6(\xi + 2)^2 = 0, \text{ d. h. } \eta - 3 = \pm\sqrt{3}(\xi + 2).$$

2. Die gleiche Aufgabe für die Kurve

$$x^3 - 4x^2 - 3y^2 + 12y - 12 = 0.$$

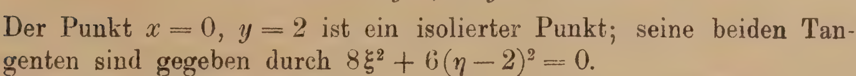


Fig. 37.

Der Punkt $x = 0$, $y = 2$ ist ein isolierter Punkt; seine beiden Tangenten sind gegeben durch $8\xi^2 + 6(\eta - 2)^2 = 0$.

3. Die gleiche Aufgabe für die Kurve $x^3 + xy^2 - 2x^2 - 2y + 2 = 0$.

Hier ist $x = y = 1$ ein Rückkehrpunkt mit der Tangente $\xi + \eta - 2 = 0$.

4. Zu zeigen, daß die Kurve $x^4 + 12x^3 - 6y^3 + 36x^2 + 27y^2 - 81 = 0$ drei Doppelpunkte hat; ihre Koordinaten und Tangenten sind anzugeben.

$$x = 0,\ y = 3 \text{ mit den Tangenten } 2\xi \pm \sqrt{3}(\eta - 3) = 0,$$
$$x = -3,\ y = 0 \text{ mit den Tangenten } 2(\xi + 3) \pm \eta\sqrt{6} = 0,$$
$$x = -6,\ y = 3 \text{ mit den Tangenten } 2(\xi + 6) \pm (\eta - 3)\sqrt{3} = 0.$$

5. Die Kurve $x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 1 = 0$ hat vier Doppelpunkte. Da eine nicht zerfallende Kurve vierter Ordnung höchstens drei Doppelpunkte haben kann, wie in der Theorie der höheren ebenen Kurven gezeigt wird, muß die vorgelegte Gleichung zwei Kegel-

schnitte darstellen, deren Schnittpunkte die Doppelpunkte sind. Man bestimme diese sowie die beiden Kegelschnitte.

Die Schnittpunkte sind $x = 0$, $y = \pm 1$ und $y = 0$, $x = \pm 1$; die Kegelschnitte (zwei Ellipsen) sind gegeben durch

$$x^2 + y^2 - 1 \pm xy\sqrt{2} = 0.$$

6. Die Kurve $(x^2 + y^2)^2 - (a^2x^2 + b^2y^2) = 0$ (Fußpunktkurve einer Ellipse mit bezug auf den Mittelpunkt der Ellipse als Pol, vgl. Aufg. 3, S. 62) hat im Koordinatenanfang einen isolierten Punkt. Vgl. Fig. 21, S. 62. Die Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ (Fußpunktkurve der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 - a^2 = 0$ mit bezug auf den Mittelpunkt als Pol, vgl. Aufg. 4, S. 62) hat im Koordinatenanfang einen eigentlichen Doppelpunkt. Vgl. Fig. 16, S. 54.

7. Welche Singularität hat die Kurve $x^4 + y^4 + 4x^2y - 2y^3 = 0$ im Koordinatenanfang?

Sie hat einen dreifachen Punkt mit den Tangenten $\eta = 0$, $\eta = +\xi\sqrt{2}$ und $\eta = -\xi\sqrt{2}$ (vgl. Fig. 38).

8. Soll eine Kurve zweiter Ordnung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

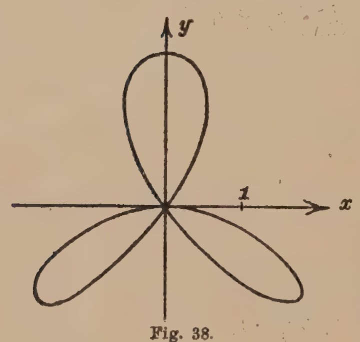


Fig. 38.

einen Doppelpunkt haben, also in ein Geradenpaar zerfallen, so muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ verschwinden.}$$

Dies folgt daraus, daß, wenn man die Kurvengleichung mit Hilfe von z homogen gemacht hat, die drei homogenen linearen Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ nebeneinander bestehen müssen.

9. Man zeige, daß die durch die Parameterdarstellung $x = at\cos t$, $y = at\sin t$ gegebene Archimedische Spirale an den Stellen $t = \pm(n + \frac{1}{2})\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, Doppelpunkte hat (vgl. Fig. 10, S. 38).

Aus $x = at_1 \cos t_1 = at_2 \cos t_2$, $y = at_1 \sin t_1 = at_2 \sin t_2$ (vgl. Nr. 6, S. 101) folgt $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\cos t_2}{\cos t_1} = \frac{\sin t_2}{\sin t_1}$ oder $\sin t_1 \cos t_2 - \cos t_1 \sin t_2 = 0$, somit $t_1 - t_2 = \pm k\pi$, wo k eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet. Wäre nun k eine *gerade* ganze Zahl oder Null, so würde $\cos t_1 = \cos t_2$, $\sin t_1 = \sin t_2$ und mit Rücksicht auf $t_1 \cos t_1 = t_2 \cos t_2$, $t_1 \sin t_1 = t_2 \sin t_2$ auch $t_1 = t_2$ folgen, die Forderung in Nr. 6, S. 101 also nicht erfüllt sein. Ist aber k eine ungerade ganze Zahl, etwa $2n + 1$, so wird

$$\frac{\cos t_2}{\cos t_1} = \frac{\sin t_2}{\sin t_1} = -1,$$

und mit Rücksicht darauf, daß diese Quotienten auch gleich $t_1 : t_2$ sein müssen, folgt $t_1 = -t_2 = \pm (n + \frac{1}{2}) \pi$.

10. Sind $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ ganze Funktionen zweiten Grades des Parameters t, etwa $\varphi_i(t) \equiv a_i t^2 + 2 b_i t + c_i$ $(i = 1, 2, 3)$, so bilden die Gleichungen

$$x = \frac{\alpha \varphi_2(t) \varphi_3(t)}{a \varphi_2(t) \varphi_3(t) + b \varphi_3(t) \varphi_1(t) + c \varphi_1(t) \varphi_2(t)},$$

$$y = \frac{\beta \varphi_3(t) \varphi_1(t)}{a \varphi_2(t) \varphi_3(t) + b \varphi_3(t) \varphi_1(t) + c \varphi_1(t) \varphi_2(t)},$$

in denen α und β Konstanten bedeuten, die Parameterdarstellung einer Kurve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. Die Parameterpaare, die zu den Doppelpunkten gehören, sind die als verschieden vorausgesetzten Wurzeln der Gleichungen $\varphi_i(t) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Die Koordinaten der Doppelpunkte sind anzugeben.[1])

Für die *beiden* Wurzeln von $\varphi_1(t) = 0$ wird $x = \frac{\alpha}{a}$, $y = 0$; die zwei Wurzeln von $\varphi_2(t) = 0$ liefern $x = 0$, $y = \frac{\beta}{b}$, die zwei Wurzeln von $\varphi_3(t) = 0$ ergeben $x = y = 0$.

§ 16.

Bestimmung der Asymptoten ebener Kurven.

Unter *Asymptoten* versteht man die in den unendlich fernen Punkten einer Kurve gezogenen Tangenten.

1. Will man die Asymptoten einer algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung $f(x, y) = 0$ bestimmen, so ordnet man zunächst ihre Gleichung nach homogenen Gliedergruppen, also folgendermaßen:

$$f(x, y) \equiv f_0(x, y) + f_1(x, y) + f_2(x, y) + \cdots + f_n(x, y),$$

wo $f_0(x, y)$ die Summe aller Glieder bezeichnet, die in x, y homogen vom n^{ten} Grade sind; ferner bedeutet $f_1(x, y)$ das im $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade homogene Aggregat, allgemein $f_k(x, y)$ das im $(n-k)^{\text{ten}}$ Grade homogene Aggregat. Das Glied $f_n(x, y)$ ist somit eine Konstante.

Beschränken wir uns vorerst auf Asymptoten, die nicht zur y-Achse parallel sind, so können wir die Gleichung einer solchen in der Form $y = px + q$ annehmen. Zur Bestimmung von p ersetzt man

---

1) Für das nähere Studium der durch eine Parameterdarstellung gegebenen Kurven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten sei auf eine Abhandlung von A. v. Brill, „Über rationale Kurven vierter Ordnung", Math. Annalen Bd. 12 (1877), S. 90, verwiesen; daselbst bilden die Doppelpunkte die Ecken des der Betrachtung zugrunde liegenden Koordinatendreiecks, und die Kurve wird zu einem Kegelschnitt in Beziehung gebracht, aus dem sie durch „quadratische Transformation" hervorgeht.

in $f_0(x, y)$ die Größe x durch 1, y durch p. So erhält man einen Ausdruck $f_0(1, p)$, der kürzer mit $\varphi_0(p)$ bezeichnet sei. Er wird im allgemeinen vom n^{ten} Grade sein. Die Wurzeln der Gleichung $\varphi_0(p) = 0$ sind die Richtungskoeffizienten der n Asymptoten. Sollte $\varphi_0(p)$ von niederem Grade als n sein, so ist dies ein Zeichen dafür, daß die Kurve auch Asymptoten hat, die zur y-Achse parallel sind; über sie wird unten näheres angegeben werden. Zur Bestimmung von q bildet man die Gleichung $\varphi_1(p) + q\varphi'_0(p) = 0$, wo $\varphi_1(p)$ mit $f_1(1, p)$ identisch ist, während $\varphi_0'(p)$ die Ableitung von $\varphi_0(p)$ bezeichnet. Jeder Wurzel p von $\varphi_0(p) = 0$ wird auf solche Weise eine Größe q zugeordnet, und $y = px + q$ ist alsdann die Gleichung einer Asymptote.

Fehlt das Aggregat $f_1(x, y)$ in der Kurvengleichung $f(x, y) = 0$ und hat $\varphi_0(p)$ keine mehrfachen Faktoren, so sind sämtliche Größen q gleich Null, und die linearen Faktoren von $f_0(x, y)$ stellen alsdann, gleich Null gesetzt, die Asymptoten der Kurve dar.

Hat $\varphi_0(p) = 0$ eine Doppelwurzel $p = p_1$, für die $\varphi_1(p)$ verschwindet, so kann jede Gerade $y = p_1 x + q$, wo q eine beliebige Konstante ist, als (uneigentliche) Asymptote betrachtet werden. Insbesondere aber sind dann diejenigen beiden Geraden die eigentlichen Asymptoten der Kurve, für die sich q aus

$$\varphi_2(p) + q\varphi_1'(p) + \frac{q^2}{2}\varphi_0''(p) = 0$$

bestimmt, wobei $\varphi_2(p) = f_2(1, p)$ ist.

Das Kennzeichen für das Auftreten zur y-Achse paralleler Asymptoten $x = k$ ist bereits erwähnt worden. Zur Bestimmung von k dividiert man die Gleichung der Kurve durch die höchste in ihr auftretende Potenz von y und setzt nun $y = \infty$; es bleibt alsdann eine Gleichung für x, deren Wurzeln die gesuchten Größen k sind.

2. Ist die Kurve durch eine Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben, so untersucht man zunächst, ob es Werte t gibt, für die nur eine der beiden Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ unendlich groß wird, während die andere endlich bleibt. Ist z. B. $\varphi(t) = \infty$ für $t = \tau$, hingegen $\psi(\tau) = c$, so ist $y = c$ eine Asymptote der Kurve. Werden beide Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ für $t = \tau$ unendlich groß, so haben die Asymptoten der Kurve im allgemeinen Gleichungen von der Form $y = px + q$, wobei $p = \lim\limits_{t=\tau} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$, $q = \lim\limits_{t=\tau} [\psi(t) - p\varphi(t)]$.

3. Der Fall, daß die Gleichung einer Kurve in der Form $y = f(x)$ vorliegt, ist auf den soeben behandelten zurückführbar, man braucht nur $x = \varphi(t)$ zu setzen und erhält dann $y = f[\varphi(t)] = \psi(t)$, oder man setzt (oft noch einfacher) $x = t$, $y = f(t)$.

4. Ist eine Kurve durch ihre Gleichung in Polarkoordinaten $f(r, \vartheta) = 0$ gegeben, so bestimmt man zunächst durch die Annahme $r = \infty$ die Polarwinkel ϑ, denen unendlich große Radienvektoren zu-

gehören, d. h. man bestimmt die Richtungen der Asymptoten. Durch Berechnung der zugehörigen Polarsubtangente (vgl. Nr. 4, S. 66) findet man alsdann die Lage der Asymptote.

5. Auch die Asymptoten einer in der Form $f(x, y) = 0$ gegebenen Kurve lassen sich mit Hilfe von Polarkoordinaten bestimmen. Man setzt $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ und sucht, wie eben angegeben, die Richtungen ϑ der unendlich fernen Punkte der Kurve. Erhält man für ϑ einen rechten Winkel, so liegt eine Asymptote $x = k$ vor, wo k so zu bestimmen ist, wie oben in Nr. 1 gezeigt wurde. Die übrigen Asymptoten, nämlich diejenigen, die nicht zur x-Achse rechtwinklig sind, haben Gleichungen von der Form $y = px + q$, wo $p = \operatorname{tg} \tau$ ist, während sich q aus der Gleichung ergibt, die entsteht, wenn man $y = x \operatorname{tg} \tau + q$ in $f(x, y) = 0$ einträgt und nun $x = \infty$ setzt.

Beispiele.

1. $$2x^2 - 5xy + 3y^2 - 7x + 4y - 12 = 0.$$

Die Asymptoten sind $y = x + 3$ und $2x - 3y - 13 = 0$.

2. $3x^3 - 8x^2y + 3xy^2 + 2y^3 + 3x^2 - 5xy - y^2 + 6x - 20 = 0.$

Asympt.: $4x - 4y + 3 = 0$, $84x + 28y + 9 = 0$, $7x - 14y + 1 = 0$.

3. $$2x^3 - x^2y + (a - 2b)xy + 5a^2x + 2aby - b^3 = 0.$$

Asympt.: $2x - y + 2(a - 2b) = 0$, $x = a$, $x = -2b$.

4. $$x^3 - 3xy^2 - 2y^3 + 4x + 8y - 8 = 0.$$

Eine Asymptote ist $y = \frac{1}{2}x$; jede Gerade $y = -x + q$ mit beliebigem Zahlenwert q ist eine uneigentliche Asymptote, während $q = 2$ und $q = -2$ die eigentlichen Asymptoten darstellen.

5. $$y^2(x - a) - x^2(x + a) = 0.$$

Asympt.: $y = x + a$, $y = -x - a$, $x = a$.

6. $$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Asympt: $y = x$, $x = 1$, $x = -1$.

7. Das Cartesische Blatt $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ hat eine reelle und zwei imaginäre Asymptoten; die reelle Asymptote ist zu bestimmen. Vgl. Fig. 36, S. 99.

$$x + y + a = 0.$$

8. Für die durch eine Parameterdarstellung $x = \frac{t - 8}{t^2 - 4}$, $y = \frac{3}{t(t^2 - 4)}$ gegebene Kurve die Asymptoten zu bestimmen.

Man findet $x = 2$, $2x + 8y + 1 = 0$, $6x - 40y + 9 = 0$.

9. Die gleiche Aufgabe für die Kurve $y = \frac{a \cdot e^{\frac{1}{x}} + b}{ce^{\frac{1}{x}} + d}$, deren Gleichung durch $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{ae^t + b}{ce^t + d}$ ersetzt werden kann.

Die Asymptoten sind $y = \frac{a+b}{c+d}$ und $x = \frac{1}{\ln\left(-\frac{d}{c}\right)}$.

10. Die gleiche Aufgabe für $y = \frac{ax+b}{ce^{\frac{1}{x}} + d}$ mit Hilfe von $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{a+bt}{t(ce^t + d)}$.

Man findet

$$x = \frac{1}{\ln\left(-\frac{d}{c}\right)} \text{ und (für } t = 0) \; y = \frac{ax}{c+d} + \frac{bc + bd - ac}{(c+d)^2}.$$

11. Die Asymptote der hyperbolischen Spirale $r = \frac{a}{\vartheta}$ zu bestimmen, wo $a > 0$ sei.

Die Asymptote ist zur x-Achse parallel; die ihrem unendlich fernen Punkt zugehörige Polarsubtangente wird $\frac{r^2}{r'} = -a$, also erhält man $y = a$, unter Rücksicht auf die in Nr. 5, S. 66 gegebene Regel (Fig. 39).

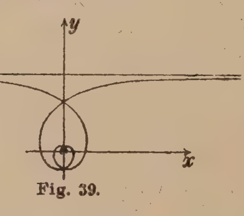


Fig. 39.

12. Die entsprechende Aufgabe für den Kegelschnitt $r = \frac{p}{2(1 - \varepsilon\cos\vartheta)}$, wo ε die numerische Exzentrizität, p den Parameter der Kurve, d. h. die Länge der durch einen reellen Brennpunkt rechtwinklig zur Hauptachse gezogenen Sehne bedeutet.

Die Richtungen der Asymptoten bestimmen sich aus $\cos\vartheta = \frac{1}{\varepsilon}$, sind daher nur reell, falls $\varepsilon \geqq 1$ ist, also bei der Hyperbel und der Parabel, und zwar liegen die zwei unendlich fernen Punkte der Hyperbel in den Richtungen $\vartheta_0 = \arccos\frac{1}{\varepsilon}$ und $2\pi - \vartheta_0$, bei der Parabel liegen beide zusammen auf der Achse der Kurve. Die Polarsubtangente wird bei der Hyperbel gleich $\frac{-p}{2\varepsilon\sin\vartheta}$ oder gleich $\frac{-p}{+2\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$ für die zu ϑ_0 gehörige Asymptote, gleich $\frac{-p}{-2\sqrt{\varepsilon^2-1}}$ für die zu $2\pi - \vartheta_0$ gehörige Asymptote. Diese Geraden haben in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichungen

$$2(\varepsilon^2 - 1)x - 2y\sqrt{\varepsilon^2 - 1} + \varepsilon p = 0 \text{ und } 2(\varepsilon^2 - 1)x + 2y\sqrt{\varepsilon^2 - 1} + \varepsilon p = 0,$$

wenn die Achse der Polarkoordinaten als x-Achse und der Pol als Koordinatenanfang gewählt wird.

Bei der Parabel ist die unendlich ferne Gerade Tangente in den zwei zusammenliegenden unendlich fernen Kurvenpunkten.

Weitere Aufgaben zur Asymptotenbestimmung findet man in § 20.

§ 17.

Maxima und Minima (extreme Werte) einer Funktion.

I. Funktionen von einer Veränderlichen.

1. Wenn die Ordinate y des Punktes P der Kurve $y = f(x)$ einen extremen Wert haben soll, muß jedenfalls (vgl. S. 96) die für den Punkt P gebildete erste Ableitung y' verschwinden, und zwar ist y ein Minimum oder Maximum, je nachdem die für P gebildete zweite Ableitung y'' positiv oder negativ ist.

Hierbei sei auf einen besonderen, häufig eintretenden Fall aufmerksam gemacht. Will man das Vorzeichen von y'' bestimmen, wenn y' ein Bruch $\frac{u}{v}$ ist, so genügt es, die aus $y' = 0$ oder $u = 0$ erhaltenen Werte x einzusetzen in $\frac{u'}{v}$; wenn überdies v eine für alle reellen Werte x positive Größe ist, stimmen die Vorzeichen von y'' und u' überein, man hat dann nur das Vorzeichen zu bestimmen, das der Wert u' für die betreffende Wurzel x von $u = 0$ annimmt.

Wenn für den Punkt P außer y' auch y'' und eine Reihe weiterer Ableitungen, etwa bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung einschließlich, verschwindet, während $y^{(n)} \neq$ ist, so hat die Kurve $y = f(x)$ bei geradem n in P ein Minimum oder Maximum, je nachdem $y^{(n)}$ positiv oder negativ ist; bei ungeradem n liegt dagegen weder ein Maximum noch ein Minimum vor, vielmehr ist P ein Wendepunkt mit einer zur x-Achse parallelen Tangente.

Selbstverständlich muß die Funktion $f(x)$ in der nächsten Umgebung der Stelle x stetig verlaufen, und gleiches muß von ihren Ableitungen gelten, so weit diese bei Bestimmung des extremen Wertes zu berücksichtigen sind.

2. Sind x und y durch eine Gleichung $f(x, y) = 0$ verbunden, so tritt bei Bestimmung der Werte x, für die y ein Minimum oder Maximum wird, an Stelle von $y' = 0$ die Gleichung $f_1 = 0$, während sich y'' nach Nr. 1, S. 36 auf $-\frac{f_{11}}{f_2}$ reduziert. Hierbei ist vorausgesetzt, daß $f_2 \neq 0$ sei. Im vorliegenden Fall hat also y'' denselben Wert wie $-\frac{f_{11}}{f_2}$.

Beispiele.

Für welche Werte der unabhängigen Veränderlichen x nehmen die folgenden Funktionen einen extremen Wert an?

1. $$y = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{3}.$$

Für $x = 0$ wird $y = \frac{1}{3}$ ein Max., für $x = 2$ wird $y = -1$ ein Min. Vgl. Fig. 1, S. 3.

2. $$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20.$$

Für $x = 3$ wird $y = -61$ ein Min., für $x = -2$ wird $y = 64$ ein Max.

3. $$y = (x - a)^2.$$

Für $x = a$ wird $y = 0$ ein Min.

4. $$y = (x - a)^3.$$

Kein Max. oder Min. vorhanden. Der Punkt $x = a$, $y = 0$ ist ein Wendepunkt der Kurve.

5. $y = (x - a)^n$, wo n eine positive ganze Zahl sei.

Bei geradem n liefert $x = a$ ein Min. $y = 0$, bei ungeradem n hat die Kurve an dieser Stelle einen Wendepunkt.

6. $$y = x^2(x - a)^2.$$

Für $x = 0$ und $x = a$ wird $y = 0$ ein Min., für $x = \frac{1}{2}a$ wird $y = \frac{1}{16}a^4$ ein Max.

7. Man zeige, daß unter allen Dreiecken mit gegebenen Längen a und b zweier Seiten das rechtwinklige mit den Katheten a und b den größten Flächeninhalt hat.

Der Inhalt $J = \frac{1}{2}ab \sin x$, wo x den von den Seiten a und b eingeschlossenen Winkel bezeichnet, wird für $x = \frac{1}{2}\pi$ ein Max.

8. Zu zeigen, daß unter allen Dreiecken von gegebenem Umfang $2s$, die man über derselben Grundlinie a konstruieren kann, das gleichschenklige den größten Flächeninhalt hat.

Der Inhalt $J = \sqrt{s(s-a)(s-x)(a+x-s)}$, wo x und $2s - a - x$ die Längen der beiden nicht gegebenen Seiten sind, wird ein Max., wenn der Radikand ein Max. wird. Dies tritt für $x = s - \frac{a}{2}$ ein.

9. Aus einem Stück Eisenblech von der Gestalt eines Rechtecks $ABCD$ (Fig. 40), dessen Seiten die Längen a und b haben, kann man durch Wegschneiden von vier gleich großen Quadraten an den Ecken und Aufbiegen der übrig bleibenden Randstücke um die Kanten EF, FG, GH, HE einen offenen Kasten herstellen. Wie groß ist die Seite x der Quadrate zu wählen, damit das Volumen V des

Kastens möglichst groß wird?[1]) Wie groß ist insbesondere x zu wählen, wenn das Rechteck $ABCD$ ein Quadrat ist $(b = a)$? Vgl. auch Aufg. Nr. 5, S. 146.

$V = x(a-2x)(b-2x)$. Man findet $x = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$, ein Ausdruck, der sich für $b = a$ auf $x = \frac{1}{6}a$ reduziert.

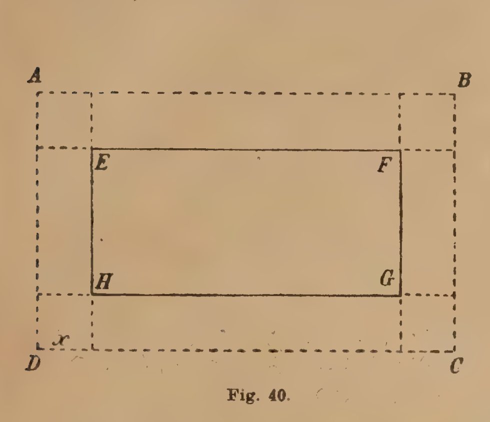


Fig. 40.

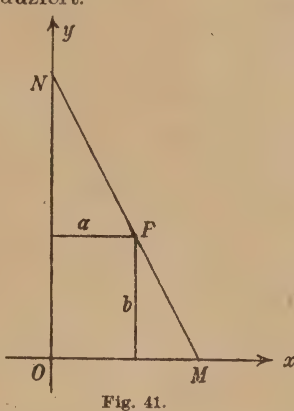


Fig. 41.

10. Durch den im ersten Quadranten des Koordinatensystems gelegenen Punkt P $(x = a,\ y = b)$ wird eine Gerade gezogen, die die positiven Teile der Koordinatenachsen in M und N schneidet (Fig. 41); man zeige, daß der kleinste Wert, den die Summe $s = OM + ON$ der Achsenabschnitte annehmen kann, gleich $a + 2\sqrt{ab} + b$ ist.

Setzt man $OM = x$, so wird $s = x + \frac{bx}{x-a}$, $\frac{ds}{dx} = 0$ und $\frac{d^2s}{dx^2} > 0$ ergibt $x = a + \sqrt{ab}$.

11. Setzt man das Volumen einer Wassermenge von der Temperatur 0^0 gleich 1, so ist nach Untersuchungen von H. Kopp[2]) das Volumen bei der zwischen 0^0 und 25^0 Celsius gelegenen Temperatur t gegeben durch

$$v_t = 1 - 0{,}000061045\,t + 0{,}0000077183\,t^2 - 0{,}0000003734\,t^3.$$

Bei welcher Temperatur ist das Volumen am kleinsten, also die Dichtigkeit am größten?

$$t = 4^0{,}075.$$

12. Für die spezifische Wärme c_t des Wassers bei einer Temperatur von t^0 Celsius gilt die Formel[3])

---

1) Diese Aufgabe, die man in mehreren Lehrbüchern und Aufgabensammlungen zur Differentialrechnung findet, scheint zum ersten Mal bei N. Cirier, Nouv. Ann. de Math. Bd. 13 (1854), S. 411 f. vorzukommen.

2) Vgl. Poggendorffs Annalen Bd. 72, S. 44 f. (1847).

3) Vgl. A. Winkelmann „Handbuch der Physik", 2. Aufl., 3. Bd. Wärme. Leipzig 1906, S. 173.

$$c_t = 1 - 0,000\,6684\,t + 0,00001092\,t^2;$$

bei welcher Temperatur ist die spezifische Wärme ein Minimum?

$$t = 30^0,6.$$

13. Ein Punkt P_1 bewegt sich von A aus in der Richtung nach B mit konstanter Geschwindigkeit v_1. In demselben Augenblick, in dem P_1 seine Bewegung von A aus beginnt, verläßt ein Punkt P_2 die Stelle B und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_2 in der Richtung nach C (Fig. 42). Dabei ist gegeben $AB = a$, $\sphericalangle ABC = \beta$. Nach welcher Zeit t ist der Abstand $P_1 P_2$ der beiden Punkte ein Minimum?

Es ist $\overline{P_1 P_2}^2 = (a - v_1 t)^2 + v_2^2 t^2 - 2(a - v_1 t) v_2 t \cos\beta$, und dieser Ausdruck wird ein Minimum für $t = \frac{a(v_1 + v_2 \cos\beta)}{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos\beta}$.

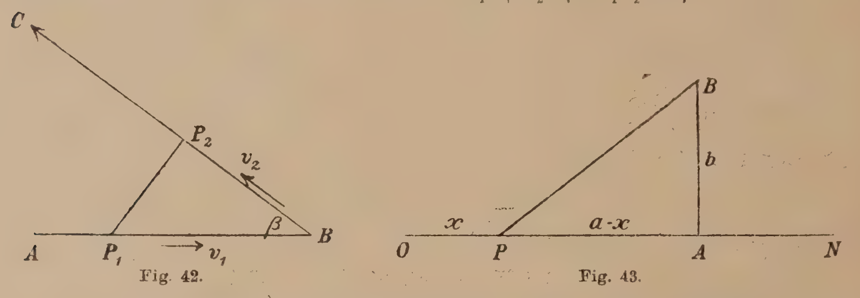


Fig. 42. Fig. 43.

14. Seitwärts von dem Hauptstrang ON einer geradlinig verlaufenden Wasserleitung liegt im Abstand $AB = b$ das Gebäude B und es ist $OA = a$ (Fig. 43). Von welcher Stelle P des Hauptstranges muß man die nach B führende geradlinige Nebenleitung PB abzweigen. wenn die Gesamtkosten K möglichst gering werden sollen und angenommen wird, daß längs der Strecken OP, PN, PB die Kosten der Anlage für die Längeneinheit bzw. k_1, k_2, k_3 Mark betragen?

Setzt man $ON = l$, $OP = x$, so ist

$$K = k_1 x + k_2 (l - x) + k_3 \sqrt{(a - x)^2 + b^2},$$

daher

$$\frac{dK}{dx} = k_1 - k_2 - \frac{(a - x) k_3}{\sqrt{(a - x)^2 + b^2}} = 0, \quad \frac{d^2 K}{dx^2} > 0.$$

Bei Einführung des Winkels $APB = \alpha$ folgt $\cos\alpha = \frac{k_1 - k_2}{k_3}$ und alsdann $x = a - b \cot\alpha$.

15. Ein Radfahrer fährt längs einer geradlinig verlaufenden Straße AB mit der Geschwindigkeit v_1; seitwärts von dieser Geraden liegt ein Ort C im Abstand $BC = b$, während $AB = a$ ist (Fig. 44). Nach jener Seite der Straße AB hin, auf der C gelegen ist, erstreckt sich zum Radfahren ungeeignetes Gelände, man muß zu Fuß gehen, und

dies geschehe mit der Geschwindigkeit v_2. An welcher Stelle P der Geraden AB muß nun der Radfahrer vom Rad absteigen und geradlinig von P nach C gehen, wenn die zur Zurücklegung des Weges $AP + PC$ nötige Zeit t ein Minimum sein soll?

Setzt man $PB = x$, so wird $AP = a - x$ und

$$t = \frac{a-x}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+x^2}}{v_2}, \quad \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{v_1} + \frac{x}{v_2\sqrt{b^2+x^2}} = 0, \quad x = \frac{b v_2}{\sqrt{v_1{}^2 - v_2{}^2}},$$

$\frac{d^2t}{dx^2}$ wird positiv. Man erkennt zugleich, daß die Aufgabe nur einen Sinn hat, wenn $v_1 > v_2$ ist.

Aus

$$\frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{v_2}{v_1}$$

folgt übrigens, wenn $\sphericalangle CPB = \alpha$ gesetzt wird,

$$\cos\alpha = v_2 : v_1,$$

ein Ausdruck, der von a und b ganz unabhängig ist. Daraus geht hervor, daß die *Richtung*, in der man von P aus abzweigen muß, von der Lage des Punktes C ganz unabhängig ist und nur von dem Verhältnis der Geschwindigkeiten v_1, v_2 abhängt. Ist z. B. $v_1 = 3v_2$, so wird $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ und $\alpha = 70^0\ 31'\ 43''$.

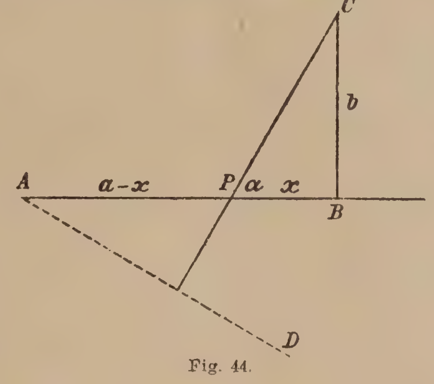


Fig. 44.

W. Launhardt deutet diese Aufgabe und ihre Lösung folgendermaßen:[1])

Längs einer Straße AB ist der Frachtsatz für Transportkosten für je einen Kilometer gleich k_1, längs des ungebahnten Weges PC gleich k_2. Wo ist P anzunehmen, wenn der Transport längs $AP + PC$ ein Minimum von Kosten verursachen soll?

Hier muß $(a-x)k_1 + \sqrt{x^2+b^2}\,k_2$ ein Minimum werden; man findet $x : \sqrt{x^2+b^2} = k_1 : k_2 = \cos\alpha$. In dieser Richtung α muß der Transport von P nach C oder von C nach P erfolgen. Eine durch A rechtwinklig zu CP gezogene Gerade AD kann als *Zugangsfront* bezeichnet werden, denn der Verkehr aus dem seitwärts von AB gelegenen Gebiet nach AB hin muß rechtwinklig zu dieser Geraden erfolgen, wenn die Transportkosten möglichst klein sein sollen.

16. In welchem Augenblick ist beim Schubkurbelgetriebe die Beschleunigung p des Kolbens gleich Null, somit die Geschwindigkeit v ein Maximum oder Minimum?

Nach Aufg. Nr. 24, S. 18, ist

$$v = a\omega\left\{\sin\vartheta + \frac{k\sin 2\vartheta}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}\right\},$$

1) „Theorie des Trassierens", Heft 1, Hannover 1887, S. 20f.

ferner nach Aufg. Nr. 25, S. 18:

$$p = \frac{dv}{dt} = a\omega^2 \left\{ \cos\vartheta + \frac{k\cos 2\vartheta + k^3 \sin^4\vartheta}{(1 - k^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Die Forderung $p = 0$ liefert im Fall $k \neq 1$ für ϑ die Gleichung $1 - \sin^2\vartheta - k^2\sin^4\vartheta + k^4\sin^6\vartheta = 0$, die als kubische Gleichung für $\sin^2\vartheta$ betrachtet werden kann und den Ausdruck

$$\Delta = k^4(k-1)(k+1)(27k^2+5)$$

zur Diskriminante hat. Im Fall $k = 1$ zieht die Forderung $p = 0$ die Gleichung $\cos\vartheta = 0$ nach sich, somit $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$.

17. In welchem Augenblick ist beim oszillierenden Schubkurbelgetriebe (vgl. Aufg. Nr. 30, S. 20) die Winkelgeschwindigkeit ω_1, mit der sich die Schubstange AB um B dreht (Fig. 9, S. 19), ein Maximum oder Minimum?

Aus

$$\omega_1 = \frac{a\omega(b\cos\vartheta - a)}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta} \quad \text{folgt} \quad \frac{d\omega_1}{d\vartheta} = \frac{ab\omega(a^2 - b^2)\sin\vartheta}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta)^2},$$

es kommen somit nur die Werte $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ in Betracht. Im Fall $b > a$ entspricht dem Wert $\vartheta = 0$ das Maximum von ω_1, nämlich $\frac{a\omega}{b-a}$, dem Wert $\vartheta = \pi$ das Minimum, nämlich $-\frac{a\omega}{b+a}$.

18. In einem von einem Wechselstrom durchflossenen Draht ist die Stromstärke J eine periodische Funktion der Zeit, nämlich

$$J = J_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$$

(vgl. Aufg. Nr. 4, S. 10), wo J_0 die größte auftretende Stromstärke, T die Dauer einer Periode bezeichnet, in der sich die gleiche Phase des Wechselstroms wiederholt. Welchen Werten t entsprechen die maximalen Stromstärken in der einen oder anderen Richtung?

Zu den Zeiten $t = (n + \frac{1}{4})T$, $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ erreicht die Stromstärke in der einen Richtung ihr Maximum, zu den Zeiten $t = (n + \frac{3}{4})T$ in der anderen Richtung.

19. Man zeige, daß der *Effekt* im äußeren Stromkreis eines galvanischen Elementes ein Maximum ist, wenn der Widerstand W im äußeren Stromkreis (in der Leitung) gleich dem Widerstand w im Element selbst ist. Hierzu werde bemerkt, daß zwischen diesen Größen, der elektromotorischen Kraft E und der Stromstärke J nach dem Ohmschen Gesetz die Beziehung stattfindet $J = \frac{E}{w + W}$. Unter dem gesamten Effekt[1]) versteht man das Produkt aus der elektro-

---

1) Im allgemeinen versteht man unter *Effekt* die in einer Sekunde geleistete Arbeit. Die von einem elektrischen Strom geleistete Arbeit ist nun gleich dem Produkt aus der elektromotorischen Kraft E und der Elektrizitätsmenge q: diese

motorischen Kraft und der Stromstärke, also den Ausdruck $V = EJ = J^2(w + W)$, der Effekt im äußeren Stromkreis ist der Summand $V_1 = J^2 W = \frac{E^2 W}{(w + W)^2}$. Dieser Ausdruck ist als Funktion von W zu betrachten und soll ein Maximum werden. Vgl. Aufg. 50, S. 129.

Für die Rechnung ist es bequemer zu verlangen, daß der reziproke Wert von V_1 ein Min. werde. Dies trifft für $W = w$ ein.

20. Zwei Orte P_1 und P_2 sollen durch eine Eisenbahn verbunden werden, und zwar liege P_1 im flachen Land, P_2 auf höherem Gelände, das von einer die Orte P_1 und P_2 trennenden Geraden g gleichmäßig ansteigt. So entstehen zwei verschiedene Gebiete, die g zur Grenze haben. In dem Gebiet, das P_1 enthält, mögen die Eisenbahnzüge mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit v_1 fahren, im anderen Gebiet sei die Geschwindigkeit v_2. Es wird gefragt, nach welchem Punkt Q der Geraden g die Eisenbahn von P_1 und von P_2 aus jedesmal geradlinig zu führen ist, wenn die zum Durchfahren der ganzen Bahnstrecke notwendige Zeit t ein Minimum sein soll. Dabei seien $P_1 R_1 = a_1$

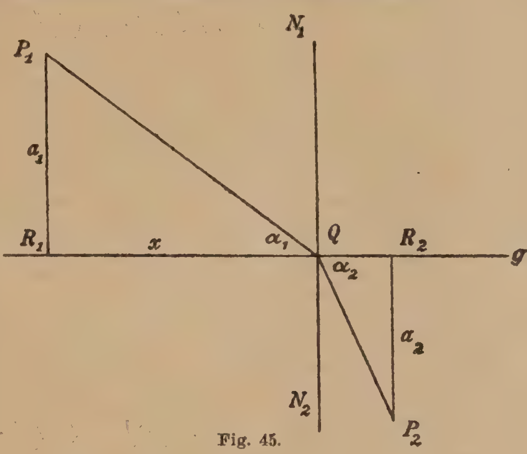


Fig. 45.

---

aber ist durch $q = Jt$ gegeben, wenn t die Zeit bezeichnet, während deren der Strom J die Elektrizitätsmenge q geliefert hat. Somit ist die vom Strom geleistete Arbeit gleich EJt, die Leistung in einer Sekunde oder der Effekt ist EJ. Da die praktische Einheit der elektromotorischen Kraft als *Volt*, die praktische Einheit der Stromstärke als *Ampère* bezeichnet wird, führt die Einheit der elektrischen Leistung den Namen *Volt-Ampère*; gebräuchlicher ist der Ausdruck *Watt*. In mechanischer Arbeit ausgedrückt ist 1 Watt = 0,102 Kilogrammeter (1 Sek.) = 10^7 Erg, in Wärmeeinheiten gleich 0,24 Grammkalorien. Bezüglich des Ausdruckes *Erg* sei erwähnt, daß er die Einheit der Arbeit darstellt, nämlich die Arbeit, die von der Einheit der Kraft auf dem Weg von 1 cm (der Längeneinheit) geleistet wird. Die Kraft wird in der Mechanik als das Produkt aus Masse und Beschleunigung definiert; die Einheit der Kraft erteilt der Masse 1 die Beschleunigung 1 und wird *Dyn* genannt. Da die Anziehung der Erde der Masse eines Gramms eine Beschleunigung von rund 980 cm erteilt, ist die Kraft, mit der ein Gramm auf seine Unterlage drückt, gleich 980 Dyn; einem Kilogramm entsprechen 980000 Dyn. Offenbar ist ein Kilogrammeter gleich $98 \cdot 10^6$ Erg. Ein elektrischer Strom von der Stärke 1 Ampère scheidet im Knallgasvoltameter bei 0° Temperatur und 760 mm Druck in 1 Sekunde 0,174 ccm Knallgas aus, im Silbervoltameter 1,118 mg Silber. — Die Einheit der elektromotorischen Kraft ist etwa gleich der elektromotorischen Kraft eines Daniellschen Elementes. Als Einheit des Widerstandes diente früher die Siemens-Einheit, der Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt bei 0° Temperatur, jetzt das Ohm = 1,063 Siemens-Einheiten.

und $P_2R_2 = a_2$ die Abstände der Punkte P_1, P_2 von der Geraden g, ferner sei $R_1R_2 = c$, $R_1Q = x$ (Fig. 45). Die Überführung der Geraden P_1Q in die Gerade QP_2 mit Hilfe einer Übergangskurve erfordert eine besondere Untersuchung, die jetzt nicht vorgenommen werden soll.[1]) Die Gleichung für die gesuchte Strecke x soll nicht aufgelöst, sondern geometrisch gedeutet werden.

Man findet $t = \frac{\sqrt{a_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{a_2^2 + (c-x)^2}}{v_2}$, und die geometrische Deutung der Gleichung $\frac{dt}{dx} = 0$ liefert $\frac{\cos\alpha_1}{v_1} = \frac{\cos\alpha_2}{v_2}$, wo $\alpha_1 = \sphericalangle P_1QR_1$, $\alpha_2 = \sphericalangle P_2QR_2$. Bei Einführung der zu α_1 und α_2 gehörigen Komplementwinkel $\varepsilon = \sphericalangle P_1QN_1$ und $\beta = \sphericalangle P_2QN_2$ erhält man $\sin\varepsilon = \frac{v_1}{v_2}\sin\beta = n\sin\beta$, wenn $v_1 : v_2 = n$ gesetzt wird. Aus dieser Gleichung geht hervor, daß der Weg $P_1Q + QP_2$ derselbe ist, den ein Lichtstrahl dem Snelliusschen Brechungsgesetz gemäß nimmt, wenn die Schwingungen des Strahles in zwei durch g getrennten Medien mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 erfolgen; ε ist der Einfallswinkel, β der Brechungswinkel, n der Brechungsindex (vgl. Aufg. 25, S. 11).

21. Zwei Orte (Punkte) A und B haben von einer geradlinig verlaufenden Straße (x-Achse) die nach derselben Seite gerichteten Abstände $CA = a$, $DB = b$ und es sei $CD = c$. Die Orte sollen durch eine Telegraphenleitung verbunden werden, jedoch nicht direkt, sondern so, daß die Leitung von A zunächst nach einem Punkt P der Straße und dann nach B geführt wird (Fig. 46). Wo ist P anzunehmen, wenn die Länge $AP + PB$ der Leitung ein Minimum sein soll?

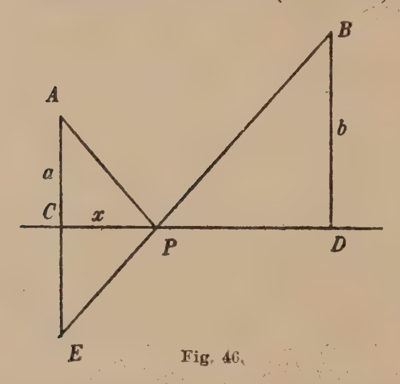


Fig. 46.

Hat der Punkt P von C den Abstand x, so muß die Summe $w = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$ ein Min. werden. Man findet

$$\frac{dw}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0,$$

die Dreiecke APC und BPD müssen daher ähnlich sein und $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPD$. Daß $\frac{d^2w}{dx^2} > 0$ ist, ergibt sich leicht, wenn man die Brüche in dem Ausdruck für $\frac{dw}{dx}$ gleichnamig macht und die in Nr. 1, S. 107 gegebenen Bemerkungen über Bildung der zweiten Ableitung beachtet.

1) Der zweite Teil dieser Aufgabensammlung, der den Anwendungen der Integralrechnung gewidmet ist, wird u. a. Aufgaben, in denen Übergangskurven vorkommen, enthalten.

Zur Konstruktion von P wird eines der beiden Lote AC, BD, z. B. AC, um sich selbst über C hinaus verlängert und der Endpunkt E dieser Verlängerung mit B verbunden; diese Verbindungslinie trifft die Gerade CD in P.

Man berechnet x aus $x : a = (c - x) : b$ und findet $x = \frac{ac}{a+b}$. Die kürzeste Weglänge $AP + PB$ wird $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$. Die Punkte A und B sind Brennpunkte einer Ellipse, die die Gerade CD in P berührt.

22. Die Mittellinie einer ebenen Landstraße bilde eine durch die Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegebene Kurve. Von welcher Stelle P der Straße hat man nach zwei Orten P_1 und P_2 Seitenstraßen $PP_1 = r_1$, $PP_2 = r_2$ abzuzweigen (Fig. 47), wenn die Kostensumme K ein Minimum sein soll und für die nach P_1 bzw. P_2 führenden Abzweigungen die Längeneinheit k_1 bzw. k_2 Mark kostet? Die Punkte P_1 und P_2 haben die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2.

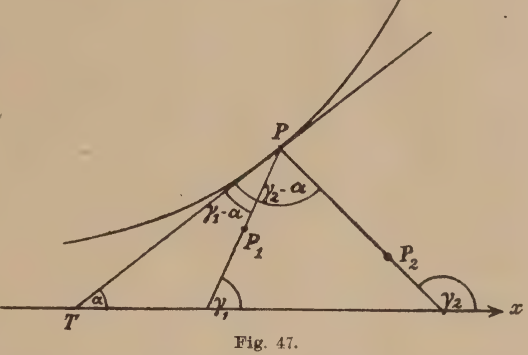


Fig. 47.

Man findet

$$K = k_1 r_1 + k_2 r_2 = k_1 \sqrt{(\varphi - x_1)^2 + (\psi - y_1)^2} + k_2 \sqrt{(\varphi - x_2)^2 + (\psi - y_2)^2},$$

daher

$$\frac{dK}{dt} = \frac{k_1}{r_1}\{(\varphi - x_1)\varphi' + (\psi - y_1)\psi'\} + \frac{k_2}{r_2}\{(\varphi - x_2)\varphi' + (\psi - y_2)\psi'\} = 0.$$

Bezeichnet man nun mit γ_1 und γ_2 die Winkel, unter denen die Strahlen von P_1 und P_2 nach P zur Richtung der positiven x-Achse geneigt sind, so wird

$$\frac{dK}{dt} = k_1\{\varphi' \cdot \cos\gamma_1 + \psi' \cdot \sin\gamma_1\} + k_2\{\varphi' \cdot \cos\gamma_2 + \psi' \cdot \sin\gamma_2\} = 0.$$

Für den Winkel α, den die in P gezogene Tangente der Kurve mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, besteht die Gleichung $\sin\alpha : \cos\alpha = \psi' : \varphi'$, mit deren Hilfe sich $\frac{dK}{dt} = 0$ auf

$$k_1 \cos(\gamma_1 - \alpha) + k_2 \cos(\gamma_2 - \alpha) = 0$$

reduziert.

Faßt man daher k_1 und k_2 als Kräfte auf, die im Punkt P wirken, so müssen ihre Projektionen auf die Tangente von P an Größe einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sein. Mechanisch läßt sich dies realisieren, indem man auf der gegebenen Kurve eine

Rolle laufen läßt, auf die zwei durch P_1 bzw. P_2 gehende Kräfte k_1 bzw. k_2 wirken.[1]) Der Ruhepunkt der Rolle ist der gesuchte Kurvenpunkt. Hierbei wird allerdings das Gewicht der Rolle und ihre Reibung nicht berücksichtigt. Die Kräfte k_1, k_2 können durch Gewichte dargestellt werden; diese sind etwa an Fäden aufzuhängen, die durch zwei im Zeichenbrett befindliche Löcher P_1, P_2 gezogen und am Mittelpunkt der Rolle befestigt sind.

23. Die Intensitäten a und b zweier Lichtquellen A und B, die als Punkte betrachtet werden, verhalten sich wie 8 zu 1; die Strecke AB sei 6 m lang. Welcher Punkt P der Strecke wird am schwächsten beleuchtet?

Wird der Abstand des Punktes P von A mit x bezeichnet, so ist die Intensität der Beleuchtung von P proportional zu

$$J = \frac{8}{x^2} + \frac{1}{(6-x)^2}.$$

Das Minimum dieser Intensität tritt für $x = 4$ m ein. Allgemein findet man, wenn $AB = l$ ist:

$$x = \frac{l\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}, \quad J = \frac{\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^3}{l^2}.$$

24. Eine wagrechte Gerade AB von der Länge a ist gegeben. In der durch AB gelegten Vertikalebene wird durch B eine Gerade gezogen, die mit AB den Winkel α bildet. An welcher Stelle L dieser Geraden ist ein Licht von der Intensität J_0 anzubringen, damit ein in A befindliches horizontal gelegenes Flächenelement möglichst hell beleuchtet wird? (Fig. 48.)

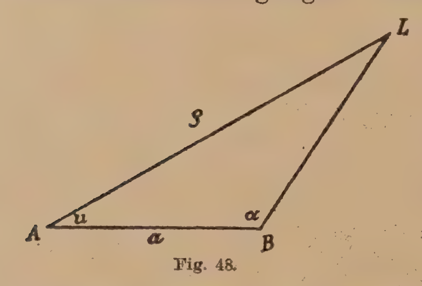


Fig. 48.

Die gesuchte Stelle L ist bekannt, sobald man den Winkel $LAB = u$ kennt; dieser werde als Unbekannte eingeführt. Die Intensität J, mit der das Flächenelement A beleuchtet wird, ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung $AL = \varrho$ der Stelle A von der Lichtquelle und direkt proportional der Intensität J_0 der Lichtquelle und dem Sinus des Winkels, unter dem die Lichtstrahlen auffallen. Man findet $J = \frac{J_0 \sin u}{a^2}(\sin u \cdot \cot \alpha + \cos u)^2$, und mit Hilfe von $\frac{dJ}{du} = 0$ ergibt sich für u nach Abscheiden eines für die eigentliche Lösung nicht in Betracht kommenden Faktors die Bestimmungsgleichung $\cot^2 u + 3 \cot \alpha \cdot \cot u - 2 = 0$. Sie läßt sich durch

1) Zu dieser Deutung des Ergebnisses vgl. Ph. Forchheimer in der Zeitschr. des Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins, 47. Jahr. (1895), S. 35.

$\varrho = \frac{3}{2} a \cos u$ ersetzen, woraus hervorgeht, daß L auf einem Kreis liegen muß, der durch A geht und dessen Mittelpunkt sich auf der Strecke AB im Abstand $\frac{3}{4}a$ von A befindet.

Ist insbesondere $\alpha = 90^0$, so wird $\operatorname{tg} u = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $BL = \frac{a}{2}\sqrt{2} = a \cdot 0{,}7$. In solcher Höhe ist also z. B. ein elektrisches Licht senkrecht über dem Punkt B eines Tisches anzubringen, wenn die in der Entfernung a von B befindliche Stelle A des Tisches möglichst hell beleuchtet werden soll.

25. Nach Messungen, die von R. Jasmund an verschiedenen Stellen der Elbe vorgenommen wurden, konnte die Art, wie sich die Geschwindigkeit y der Wasserteilchen längs einer und derselben Vertikalen mit der Höhe x über der Flußsohle ändert, durch die Formel $y = a + bM \ln(x + c)$ dargestellt werden[1]), in der M den Modul 0,43429 des Briggsschen Logarithmensystems bezeichnet, während a, b, c Konstanten sind, unter denen a hauptsächlich von der Größe des Gefälles, der Wassertiefe und dem Abstand der Vertikalen vom Flußufer abhängt; b ist im wesentlichen nur vom Gefälle abhängig, und c bezeichnet den Abstand der Asymptote $x + c = 0$ der Kurve $y = a + bM \ln(x + c)$ von der in der Flußsohle liegenden Achse $x = 0$. Die Konstanten nehmen natürlich andere Werte an, wenn man die Messungen längs einer anderen Vertikale vornimmt. In nächster Nähe der Flußsohle gilt die Formel nicht. Befindet sich auf dem Fluß eine Eisdecke, so tritt, wie Jasmund durch Messungen nahe bei Magdeburg fand, an Stelle der erwähnten Formel die folgende[2]):

$$y = a + bM \ln x + kM \ln(t - x).$$

Hier sind die Konstanten b und k positiv und von der Rauhigkeit des Bodens bzw. der Eisdecke abhängig, t ist die Flußtiefe an der betreffenden Stelle. Man bestimme nun die Stelle x, der das Maximum der Geschwindigkeit zukommt.

---

1) Gewöhnlich nimmt man bei breiten rechteckigen offenen Kanälen eine Änderung der Geschwindigkeit nach der Formel von Bazin $y = y_{\max} - 20\sqrt{Jh} \cdot \frac{t^2}{h^2}$ an, in der h die Tiefe des Kanals, t die Tiefe der betrachteten Stelle der Vertikale und J das Gefälle bezeichnet. Die graphische Darstellung dieser Formel würde eine Parabel ergeben, deren Scheitel dem Maximum von y zugehört; diese größte Geschwindigkeit würde in der Oberfläche des Kanals ($t = 0$) stattfinden. Vgl. Bazin, „Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts" in den Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut impérial de France, Bd. 19, Paris 1865, S. 228, 230 und 245. Auch diese Formel von Bazin ist natürlich nur angenähert richtig; viele Flußläufe zeigen die größte Geschwindigkeit meist etwas unter der Oberfläche.

2) Vgl. die Aufsätze von Jasmund im „Handbuch der Ingenieurwissenschaften", 3. Teil „Der Wasserbau", 1. Bd. „Die Gewässerkunde", Leipzig 1906, S. 471f., sowie in der Zeitschrift für Bauwesen, 47. Jahrgang (1897), S. 467ff.

Man findet $x = \frac{bt}{b+k} = \frac{t}{1+m}$, wenn $\frac{k}{b} = m$ gesetzt wird. Die maximale Geschwindigkeit wird $y_1 = a + b(m+1) M \ln \frac{t}{m+1} + bmM \cdot \ln m$. Bei starker Zusammenschiebung der Eisdecke ist $k > b$ und daher die Stelle der größten Geschwindigkeit dem Boden näher; bei glatt zugefrorener Eisdecke ist $k < b$, die größte Geschwindigkeit näher an der Oberfläche. Bei mehreren Messungen Jasmunds war $k : b$ rund gleich $1:2$, daher $x = \frac{2}{3}t$, die größte Geschwindigkeit in $\frac{1}{3}$ der Wassertiefe unter der Eisdecke.[1]) So wurde z. B. bei einem gewissen Lot gefunden[2]) $y = 0{,}4561 + 0{,}2292 \log x + 0{,}1146 \log(2{,}68 - x)$; hier ist $k : b = 1 : 2$.

26. Den physikalischen Begriff der Arbeit, des Produktes aus der einen gewissen Widerstand überwindenden Kraft und der zurückgelegten Weglänge, hat der Physiologe Eduard Weber bei Messung der durch einen normalen Muskel verrichteten mechanischen Arbeit angewandt. Er benutzte Gewichte als Widerstände, die während gewisser Wegstrecken (Hubhöhen der Muskeln) überwunden wurden. Beim Auftragen von Gewicht und zugehöriger Hubhöhe als Abszisse x und Ordinate y ergab sich, daß die so erhaltenen Punkte x, y keine Gerade, sondern eine krumme Linie erfüllen, ein Zeichen dafür, daß die Hubhöhen nicht proportional der Zunahme der Gewichte abnehmen. Diese Abweichung von der Geraden hat ihre Ursache in der Dehnung des Muskels, man hat daher die gekrümmte Linie als Dehnungskurve bezeichnet. Die geleistete Arbeit ist gleich dem Produkt xy und wird daher durch das von den Koordinaten des zugehörigen Punktes P und den Koordinatenachsen begrenzte Rechteck dargestellt. Es fragt sich nun, wie man diejenigen Punkte der Dehnungskurve findet, denen ein Maximum der Arbeit, also des Produktes xy, zukommt. Angeregt durch eine Abhandlung von H. Dreser zeigte O. Wiener, daß für jeden solchen Punkt seine Entfernungen von den Koordinatenachsen, *längs der in ihm gezogenen Tangente gemessen*, einander gleich sind, d. h. jeder solche Punkt halbiert das zwischen den Koordinatenachsen gelegene Stück seiner Tangente.[3])

---

1) Vgl. Zeitschrift für Bauwesen a. a. O.

2) Ebenda S. 589.

3) O. Wiener im Archiv für experimentelle Pathologie und Pharmakologie, Bd. 27 (1890), S. 255—260. Herr Professor Dr. med. Dreser in Elberfeld hatte die Freundlichkeit, mich auf diese Untersuchungen aufmerksam zu machen. In einer interessanten, mit zahlreichen Literaturangaben versehenen Abhandlung „Über die Messung der durch pharmakologische Agentien bedingten Veränderungen der Arbeitsgröße und der Elastizitätszustände des Skeletmuskels“ (in dem genannten Archiv, Bd. 27, S. 50ff.) hat er die Ergebnisse seiner eigenen Untersuchungen am ruhenden und am tätigen, unvergifteten und vergifteten Muskel dargestellt.

Dieser Satz, dessen Umkehrung übrigens nicht richtig sein würde, soll bewiesen werden.

Wäre die Dehnungskurve durch eine Gleichung $y = f(x)$ gegeben, so müßte das Produkt $z = xy = xf(x)$ ein Max. sein; zunächst müßte daher $xy' + y$ verschwinden. Es liegt in der Natur der Sache, daß im vorliegenden Fall x und y positiv sind, daher muß $y' < 0$ sein. Ferner wird (Fig. 49) die Subtangente

$$OT - OM = -y : y' = x,$$

daher $OT = 2OM$; M ist also die Mitte von OT und ebenso P die Mitte von ST. Solche Stellen P lassen sich leicht finden mit Hilfe eines Lineals, das man an der Kurve tangential verschiebt, und eines Zirkels, mit dem man die Strecken SP und PT vergleicht. Dies Verfahren kann aber auch einen Punkt P liefern, dem ein Minimum der Arbeit entspricht. Zur Trennung beider Fälle hat O. Wiener gleichseitige Hyperbeln benutzt, die die Koordinatenachsen zu Asymptoten haben, also Gleichungen von der Form $xy =$ konst. haben. Bei diesen Kurven als Dehnungskurven wäre die Arbeit für jeden Punkt konstant und überdies $SP = PT$ (vgl. auch Aufg. Nr. 1, S. 66). Berührt eine solche Hyperbel die vorgelegte Dehnungskurve an einer Stelle P, für die $SP = PT$ ist, derart, daß die Dehnungskurve $y = f(x)$ in der Umgebung von P in dem Teil der Ebene verläuft, dem die Hyperbel die konvexe Seite zukehrt, so entspricht P ein Maximum der Arbeit $xf(x)$, weil dann die für benachbarte Punkte der Dehnungskurve gemessene Arbeit kleiner ist als an der Berührungsstelle mit der Hyperbel. Findet die Berührung in P so statt, daß die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von P nach der konkaven Seite der Hyperbel gelegen ist, so liegt ein Minimum vor, und wenn die Berührung mit einem Übertritt von der einen auf die andere Seite der Hyperbel verbunden ist, hat man kein Max. und kein Min.

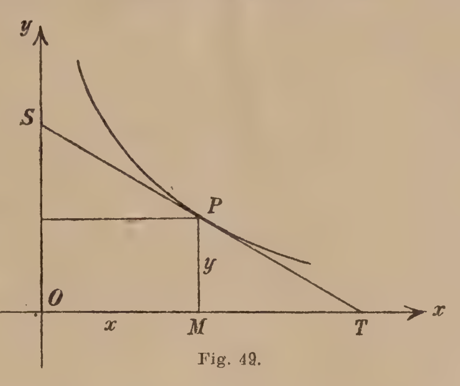


Fig. 49.

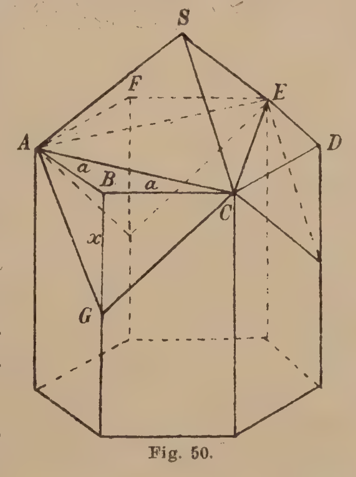


Fig. 50.

27. Die Form der Bienenzellen läßt sich aus einem geraden regulären sechsseitigen Prisma dadurch ableiten, daß man in der oberen Begrenzungsfläche $ABCDEF$ die drei Diagonalen AC, CE, EA zieht

und, unter gleichen Winkeln α gegen diese Begrenzungsebene geneigt, durch jede der drei Diagonalen eine Ebene legt (Fig. 50). Diese drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt S, so daß die obere Begrenzung der Zelle durch drei kongruente Rhomben gebildet wird, von denen eines in Figur 50 durch $AGCS$ dargestellt ist. Die Messung des Winkels $AGC = \beta$ bei Bienenzellen ergab ungefähr 109^0. Man zeige, daß dieser Winkel sehr nahe der Forderung entspricht, die gesamte Oberfläche der Bienenzelle solle bei gegebenem Volumen ein Minimum werden.[1] Ferner bestimme man den oben durch α bezeichneten Winkel.

Ist a die Länge einer Seite des Sechsecks und $BG = x$, so wird $AG = \sqrt{a^2 + x^2}$, $AC = 2a \sin\frac{\pi}{3} = a\sqrt{3}$, der Inhalt des Rhombus $AGCS = a\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$. Man sieht leicht, daß das Volumen der Zelle nicht geändert wird, unter welchem Winkel α auch die drei genannten Ebenen gegen die Begrenzungsfläche $ABCDEF$ geneigt sein mögen. Durch die Ebene $AGCS$ werden von der seitlichen Begrenzung des Prismas die Dreiecke BGA und BGC abgeschnitten, im ganzen kommen also sechs solche Dreiecke in Wegfall, ebenso die Fläche des Sechsecks, an die Stelle dieser Figuren treten drei Rhomben. Die Oberfläche des ursprünglichen Prismas wird daher im ganzen vermindert um

$$f(x) = \frac{6ax}{2} + \frac{6a^2}{4}\sqrt{3} - 3a\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}},$$

und dieser Ausdruck soll ein Max. werden. Man findet $x = \frac{a}{4}\sqrt{2}$, daher

---

1) Schon Pappus (um 300 nach Chr.) erörtert die Zweckmäßigkeit des Baues der Bienenzelle, die insbesondere darin liegt, daß bei diesen Zellen gerade das reguläre Sechseck und nicht ein anderes reguläres Vieleck Verwendung findet. Vgl. Pappi collectionis quae supersunt, hrsg. von F. Hultsch, Bd. 1, Berlin 1876, S. 304—309. Nachdem Maraldi bei Bienenzellen den oben mit β bezeichneten Winkel gemessen und gleich $109^0 28'$ gefunden hatte (Mémoires de l'académie des sciences de Paris, Jahrg. 1712, S. 312, Paris 1714), forderte Réaumur den Mathematiker Samuel König auf, zu untersuchen, welche geometrische Eigentümlichkeiten die Bienenzellen haben. Dieser fand, daß die den verschiedenen Winkeln $\alpha = (180^0 - \beta) : 2$ entsprechenden Zellen gleiches Volumen haben und zeigte mit Hilfe der Differentialrechnung, daß die Zellen, für die $\beta = 109^0 28'$ ist, die kleinste Oberfläche haben, also zu ihrem Bau am wenigsten Wachs brauchen (Réaumur, Mémoires pour servir à l'histoire des insectes, Bd. 5, Paris 1740, S. 459; vgl. auch bezüglich des von König gefundenen Ergebnisses Histoire de l'acad. des sciences de Paris, Jahrg. 1739, S. 30ff., Paris 1741). Maclaurin zeigte rein geometrisch, daß für $\beta = 109^0 28' 16''$ die Oberfläche ein Min. wird (Philos. Transactions of the Royal Society of London, Bd. 42 (Jahrg. 1743), S. 565). Vgl. ferner H. Hennessy in den Proceedings of the Royal Society of London, Bd. 39, S. 253 (1886); Bd. 41, S. 442 (1887); Bd. 42, S. 176 (1887).

$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3} : \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{8}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$, $\beta = 109^0\,28'\,16''$ Ferner wird $\operatorname{tg}\alpha = x : \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\alpha = 35^0\,15'\,52''$; übrigens ist $\beta + 2\alpha = 180^0$.

28. Welche Beziehung muß zwischen den als positiv vorausgesetzten Koeffizienten a_1 und a_3 in der Funktion $y = a_1 \sin x + a_3 \sin 3x$ stattfinden, wenn die zugehörige Kurve in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ zwei Maxima und ein Minimum haben soll?

$y' = 0$ liefert $\cos x = 0$ und $\cos x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9a_3 - a_1}{3a_3}}$; jedenfalls muß also $9a_3 > a_1$ sein. Da $y'' = \sin x\,\{-36a_3\cos^2 x + 9a_3 - a_1\}$ ist, ergibt $\cos x = 0$ oder $x = \frac{1}{2}\pi$ ein Min. $y = a_1 - a_3$, während zu $\cos x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9a_3 - a_1}{3a_3}}$ zwei Maxima $y = +\frac{3a_3 + a_1}{3}\sqrt{\frac{3a_3 + a_1}{3a_3}}$ gehören. Im Fall $9a_3 - a_1 \leqq 0$ gehört nur zu $x = \frac{1}{2}\pi$ das Maximum $y = a_1 - a_3$.

29. Ein mathematisches Pendel bewege sich in einem Widerstand leistenden Medium, und zwar mögen die Amplituden φ der Schwingungen so klein sein, daß $\sin\varphi$ ohne einen in Betracht kommenden Fehler durch φ ersetzt werden darf. Ferner sei der Widerstand proportional der Winkelgeschwindigkeit des Pendels. Alsdann besteht, wie in der mathematischen Physik gezeigt wird, für die der Zeit t zugehörige Amplitude φ eine Gleichung von der Form

$$\varphi = \gamma e^{-at}\cdot\cos(bt + c),$$

wo γ, a, b, c Konstanten bedeuten. Man untersuche nun, zu welchen Zeiten t die Amplituden φ extreme Werte erreichen und weise nach, daß diese Werte eine geometrische Reihe bilden.

Unter Benutzung des Ergebnisses von Aufg. 17, S. 15 folgt, daß die größten absoluten Werte (Max. und Min.) von φ zu Zeiten t eintreten, die aus $bt + c + \alpha = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \ldots, (n + \frac{1}{2})\pi$ folgen; dabei ist $\cos\alpha = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\pm n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Diese Zeiten sind daher $t = \{(n + \frac{1}{2})\pi - c - \alpha\} : b$, woraus hervorgeht, daß die Schwingungen aus einer extremen Lage (Elongation) in die nächste in der konstanten Zeit $t = \pi : b$ erfolgen. Die zugehörigen Ableitungen $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ sind abwechselnd negativ und positiv, ihnen entsprechen daher abwechselnd Maxima und Minima von φ, und zwar werden diese $\varphi = \pm\gamma\sin\alpha\cdot e^{-at}$, wo t die angegebenen Werte zu erhalten hat und das Plus- oder Minuszeichen zu setzen ist, je nachdem n eine gerade Zahl einschließlich der Null oder eine ungerade Zahl bedeutet. Ist $\gamma\sin\alpha > 0$, so liefern in dem Ausdruck für t geradzahlige Werte von n einschließlich der Null Maxima von φ, die ungeradzahligen Werte Minima. Die extremen Werte φ bilden

somit eine abnehmende geometrische Reihe von der Form $C\varepsilon$, $-C\varepsilon^3$, $+C\varepsilon^5, \ldots$, wo $\varepsilon = e^{-\frac{a\pi}{2b}}$ ist. Den Logarithmus des konstanten Quotienten der Glieder dieser Reihe bezeichnete Gauß als *logarithmisches Dekrement.*[1]) Der Verlauf der Funktion

$$\varphi = \gamma e^{-at} \cdot \cos(bt + c)$$

kann durch eine Kurve dargestellt werden mit t als Abszisse und φ als Ordinate eines Kurvenpunktes (Fig. 51). Man erkennt, daß für $\gamma \sin\alpha > 0$ die Maximalstellen auf der Exponentialkurve $\varphi = \gamma \cdot e^{-at} \sin\alpha$, die Minimalstellen auf der Kurve

$$\varphi = -\gamma \cdot e^{-at} \sin\alpha$$

liegen. Für

$$bt + c = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

verschwindet φ, also z. B. für

$$t = \frac{\pi}{2b} - \frac{c}{b},\ \frac{3\pi}{2b} - \frac{c}{b},\ \frac{5\pi}{2b} - \frac{c}{b}, \ldots,$$

die zugehörige Abszissendifferenz ist gleich der halben Periode $\pi : b$. Die Figur stellt die Kurve $\varphi = 10 \cdot e^{-0{,}6t} \cdot \cos\frac{4}{3}\pi t$ dar; die Einheit der Abszissen t ist daselbst doppelt so groß wie die der Ordinaten φ.

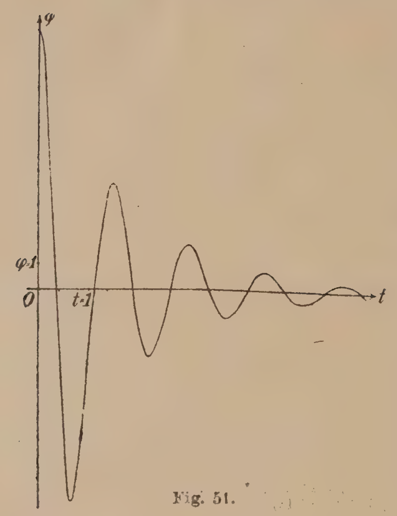


Fig. 51.

In der Form $J = J_0 e^{-at} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \beta\right)$ ist die hier behandelte Funktion in der Elektrizitätslehre bei Untersuchungen über die Entladung von Kondensatoren, über Blitzentladungen, über Schließung und Öffnung eines Stromkreises von Wichtigkeit. Es bedeutet dann J die Stromstärke, t die Zeit, T die Zeitdauer der Periode, a, J_0, β sind sonstige Konstanten.

30. Auf einer Ebene, die mit der Horizontalebene den Winkel α bildet, liege ein mit einer ebenen Lagerfläche versehener Körper vom Gewicht Q. Dieser soll durch eine im Schwerpunkt S des Körpers angreifende Kraft P, die unter dem Winkel β gegen die schiefe Ebene geneigt ist, auf der Ebene hinaufgezogen werden. Man zeige, daß der Winkel β, für den P ein Minimum wird, unabhängig von der Neigung α der schiefen Ebene ist und sich aus $\operatorname{tg}\beta = f$ bestimmt, wo f den Reibungskoeffizienten bezeichnet.

Vertikal nach unten wirkt im Schwerpunkt des Körpers das Ge-

---

1) Gauß: „Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel", Resultate aus den Beobachtungen des erdmagnetischen Vereins, 1837 = Gauß' Werke Bd. 5, S. 383.

wicht Q, die Komponenten dieser Kraft rechtwinklig bzw. parallel zur schiefen Ebene sind $SN = Q\cos\alpha$ bzw. $SM = Q\sin\alpha$ (Fig. 52). Die Komponente $SN_1 = P\sin\beta$ der Kraft P sucht den Körper von der Ebene zu entfernen, die Komponente $SM_1 = P\cos\beta$ sucht den Körper hinaufzuziehen. Der rechtwinklig zur schiefen Ebene wirkende Druck beträgt

$$SN - SN_1 = Q\cos\alpha - P\sin\beta,$$

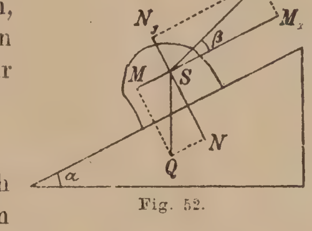


Fig. 52.

die Reibung ist ihm proportional, sie ist gleich $f(Q\cos\alpha - P\sin\beta)$. Diese Reibung muß beim Hinaufziehen des Körpers überwunden werden, daher muß $SM_1 = P\cos\beta$ gleich $SM + f(Q\cos\alpha - P\sin\beta)$ sein oder

$P\cos\beta = Q\sin\alpha + f(Q\cos\alpha - P\sin\beta)$, daher $P = \frac{Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\cos\beta + f\sin\beta}$.

Dieser Ausdruck wird ein Min. für $f = \operatorname{tg}\beta$.

31. Für welche Punkte P der Kettenlinie (vgl. Fig. 12, S. 48)

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = m\,\mathfrak{Cos}\left(\frac{x}{m}\right)$$

hat die zwischen den Schnittpunkten der x-Achse mit der Tangente und Normale von P liegende Strecke ein Minimum ihrer Länge?

Sind T und N die Längen der Tangente bzw. Normale von P (vgl. S. 65), so gilt für die Länge q der Strecke die Gleichung $q^2 = T^2 + N^2$. Man findet im vorliegenden Fall $q = \frac{m\,\mathfrak{Cos}^3\left(\frac{x}{m}\right)}{\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{m}\right)}$ und $\frac{dq}{dx} = 0$ liefert $\mathfrak{Cos}\left(\pm\frac{x}{m}\right) = +\frac{1}{2}\sqrt{6}$, $y = +\frac{m}{2}\sqrt{6}$. Die zweite Ableitung $\frac{d^2q}{dx^2}$ wird tatsächlich positiv.

32. Man zeige, daß für die vier Punkte

$$x = \frac{\pm a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \quad y = \frac{\pm b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$$

der Ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ der Abstand der zugehörigen Normale vom Mittelpunkt der Kurve ein Maximum und zwar gleich $a - b$ ist. Ferner zeige man, daß für dieselben Punkte das zwischen den Achsen der Kurve gelegene Stück der Tangente ein Minimum und zwar gleich $a + b$ ist (vgl. auch Aufg. 24, S. 52).

Die Gleichung der Normale ist

$$a\xi\sin t - b\eta\cos t - (a^2 - b^2)\sin t\cos t = 0,$$

ihr Abstand p vom Punkt $\xi = \eta = 0$ wird $p = \frac{(a^2 - b^2)\sin t\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$,

und $\frac{dp}{dt} = 0$ liefert $\operatorname{tg} t = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$, woraus sich die oben genannten Werte für x und y ergeben.

Die Gleichung der Tangente ist $b\xi \cos t + a\eta \sin t - ab = 0$; für das zwischen den Achsen gelegene Stück l der Tangente findet man

$$l^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t} + \frac{b^2}{\sin^2 t}$$

und $\frac{dl^2}{dt} = 0$ liefert wiederum $\operatorname{tg} t = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$. Die kürzeste Länge $l = a + b$ der Tangente wird übrigens durch den zugehörigen Berührungspunkt so geteilt, daß das der Achse $2a$ zunächst gelegene Stück PM der Tangente (Fig. 53) die Länge b, das andere Stück PN die Länge a hat.

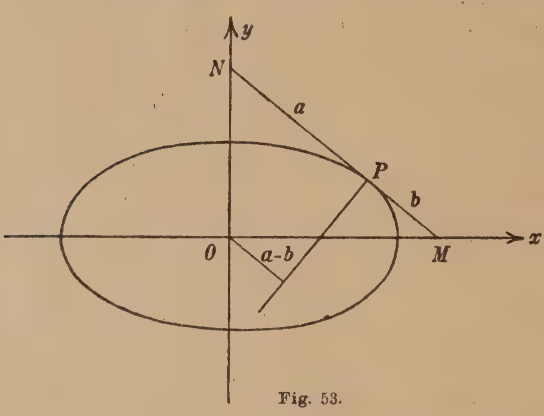


Fig. 53.

33. Für welchen Punkt P der Parabel $y^2 - px = 0$ oder $x = \frac{t^2}{p}$, $y = t$ hat das innerhalb der Kurve gelegene Stück der zu P gehörigen Normale ein Minimum seiner Länge?[1])

Die im Punkt P gezogene Normale hat die Gleichung

$$\left(\xi - \frac{t^2}{p}\right)\frac{2t}{p} + \eta - t = 0,$$

sie trifft die Kurve in einem Punkt P_1 mit dem Parameter

$$t_1 = -\frac{2t^2 + p^2}{2t}.$$

Für die Länge l der Strecke PP_1 findet man $l = \frac{(4t^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{4t^2}$, und dieser Ausdruck wird für $t = \pm \frac{p}{2}\sqrt{2}$ ein Min., also für die beiden zur Achse der Parabel symmetrisch gelegenen Punkte $x = \frac{p}{2}$, $y = \pm \frac{p}{2}\sqrt{2}$. Die Normale desjenigen dieser beiden Punkte, dessen Ordinate positiv ist, schneidet die Achse der Kurve unter einem Winkel ν, für den $\operatorname{tg} \nu = -\sqrt{2}$ ist. Der zweite Schnittpunkt dieser in dem erwähnten Sinn kürzesten Normale mit der Kurve hat den Parameter $t_1 = -p\sqrt{2}$ und die Koordinaten $x_1 = 2p$, $y_1 = -p\sqrt{2}$, er ist zugleich Krümmungsmittelpunkt (vgl. § 18, Nr. 2, S. 153) des Parabelpunktes P, also

1) Vgl. O. Bonnet in den Nouv. Annales de Math. Bd. 2 (1843), S. 420 f.

auch ein Schnittpunkt der Parabel mit ihrer Evolute (vgl. Aufg. 32, S. 164 und Fig. 54, wo $p = 16$ angenommen wurde).

34. Hat die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x, y ein Maximum (Minimum), so hat die Funktion $y = \frac{a}{f(x)}$, wo $a > 0$ sei, an derselben Stelle ein Minimum (Maximum).

In beiden Fällen sind die Werte x zu bestimmen aus $f'(x) = 0$; bei $y = \frac{a}{f(x)}$ stimmt das Vorzeichen von y'' mit dem von $-af''(x)$ überein.

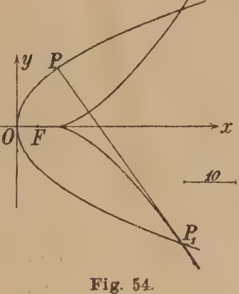


Fig. 54.

35. Welche Werte x machen die Funktion $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 9}$ zu einem Maximum oder Minimum?

$x = +3$ liefert das Max. $y = 1$, $x = -3$ das Min. $y = -\frac{1}{11}$.

36. Die gleiche Aufgabe für $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

$x = +\sqrt{2}$ liefert das Min. $y = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}}$, $y = -\sqrt{2}$ das Max. $y = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}}$.

37. Für welche Werte x wird y ein Maximum oder Minimum, wenn beide Veränderliche durch die Gleichung

$$f(x, y) \equiv 3x^2 - 8y^2 - 12x - 6y + 14 = 0$$

verbunden sind?

$f_1 = 0$ liefert $x = 2$; für diesen Wert wird $y = \frac{1}{4}$ ein Min., $y = -1$ ein Max. Die vorgelegte Gleichung kann auch in der Form

$$3(x - 2)^2 - 8\left(y + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{25}{8} = 0$$

geschrieben werden, stellt daher eine Hyperbel dar, die die Punkte $x = 2$, $y = \frac{1}{4}$ und $x = 2$, $y = -1$ zu Scheiteln hat; die Achsen der Kurve sind den Koordinatenachsen parallel.

38. Die gleiche Aufgabe für $9x^2 + 4y^2 - 36x + 40y - 8 = 0$.

Für $x = 2$ wird $y = 1$ ein Max., $y = -11$ ein Min. Die vorgelegte Gleichung stellt eine Ellipse dar, bei der die Scheitel der einen Achse durch die gefundenen Punkte gebildet werden; auch hier sind die Achsen der Kurve den Koordinatenachsen parallel.

39. Man bestimme diejenigen Punkte der Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$ (Fig. 16, S. 54), für die die Ordinate ein Maximum oder Minimum wird und zeige, daß diese Punkte auf dem Kreis $x^2 + y^2 = c^2$ liegen, der die halbe Entfernung c der beiden Brennpunkte der Kurve zum Radius und den Koordinatenanfang zum Mittelpunkt hat.

Hier wird $f_1 = 4x(x^2 + y^2 - c^2)$, wobei $x = 0$ keine Lösung er-

gibt; mit Hilfe von $x^2 + y^2 - c^2 = 0$ findet man zwei Maxima $y = \frac{1}{2}c$ für $x = \pm \frac{1}{2}c\sqrt{3}$, zwei Minima $y = -\frac{1}{2}c$ für dieselben Abszissen.

40. Für welche Abszissen x werden die Ordinaten y der Kurve $x^4 + y^4 + 4x^2y - 2y^3 = 0$ ein Maximum oder Minimum? Vgl. Fig. 38, S. 102.

Man findet ein Max. $y = 2$ für $x = 0$, Minima für

$$x = \pm\sqrt{2(\sqrt{5}-1)} = \pm 1{,}5723, \text{ nämlich } y = 1 - \sqrt{5} = -1{,}2361.$$

In vielen Fällen handelt es sich um die Bestimmung der Maxima oder Minima einer Funktion von *zwei* Größen x, y, zwischen denen aber eine so einfache Beziehung stattfindet, daß vermöge derselben sofort die eine Veränderliche aus der Funktion eliminiert werden kann und alsdann eine Funktion von der anderen Veränderlichen bleibt.

Hierzu seien folgende *Beispiele* gegeben:

41. Aus einem Baumstamm von kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser d) soll ein Balken von rechteckigem Querschnitt herausgesägt werden, um als senkrecht stehender Pfosten gegen Druckbeanspruchungen von oben Widerstand zu leisten. Wie sind die Seiten x, y des Rechtecks zu wählen, damit die Druckfestigkeit D, die dem Flächeninhalt des Balkenquerschnitts proportional ist, ein Maximum wird?

Hier wird $D = xy$ oder $D = x\sqrt{d^2 - x^2}$, und dieser Ausdruck wird für $x = y = \frac{d}{2}\sqrt{2}$ ein Max. Der Balkenquerschnitt muß daher ein Quadrat sein, wie vorauszusehen war.

42. Aus einem Baumstamm von kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser d) möge nun ein Balken von rechteckigem Querschnitt herausgesägt werden, der in horizontaler Lage auf Biegung beansprucht wird und eine möglichst große Tragfähigkeit haben soll. Dabei ist diese Tragfähigkeit oder das Widerstandsmoment des Balkenquerschnitts, wie in der Festigkeitslehre gezeigt wird, proportional dem Produkt aus der Breite x und dem Quadrat der Höhe y dieses Querschnitts. Wie groß sind x und y zu machen?

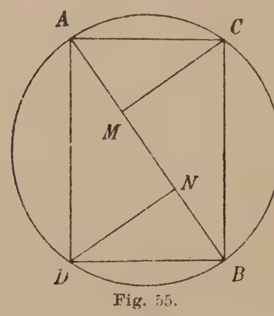


Fig. 55.

Hier muß xy^2 oder $x(d^2 - x^2)$ ein Max. werden, und dies tritt für

$$x : y : d = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

ein; angenähert ist $x : y = 5 : 7$. Zur Konstruktion teilt man den Durchmesser AB des Balkenquerschnitts durch M und N in drei gleiche Teile (Fig. 55). Die rechtwinklig zu AB durch M und N nach entgegengesetzten Richtungen gezogenen Geraden MC und ND treffen den Kreis in C und D, und $ACBD$ ist alsdann das verlangte Rechteck, denn man findet leicht $AC = d\sqrt{\frac{1}{3}}$, $AD = d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

43. Ein mit beiden Enden frei aufliegender Träger (Balken) von rechteckigem Querschnitt sei seiner ganzen Länge nach durch eine gleichmäßig verteilte Last beansprucht. Alsdann erleidet der Träger eine gewisse Einsenkung, die in der Mitte am größten und zwar, wie in der Festigkeitslehre gezeigt wird, proportional der vierten Potenz der Balkenlänge l und umgekehrt proportional dem Trägheitsmoment T des Balkenquerschnitts in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt parallel zu einem Seitenpaar des Rechtecks gezogene wagrechte Achse ist. Dieses Trägheitsmoment ist gleich $\frac{1}{12}xy^3$, wenn x die Breite, y die Höhe des Rechtecks bezeichnet. Wie groß sind bei gegebener Länge l die Größen x und y zu machen, wenn der Balken aus einem Baumstamm von kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser d) herausgesägt und die Einsenkung ein Minimum werden soll?

Der Ausdruck $xy^3 = x\sqrt{(d^2 - x^2)^3}$ muß ein Max. werden, was für $x = \frac{1}{2}d$, $y = \frac{1}{2}d\sqrt{3}$ eintritt; angenähert ist $x : y = 4 : 7$. Zur Konstruktion von x und y teilt man hier den Durchmesser AB durch M, O, N in vier gleiche Teile (Fig. 56). Die rechtwinklig zu AB durch M und N gezogenen Geraden MC und ND bestimmen das gesuchte Rechteck $ACBD$.

44. Die Seitenlinie eines geraden Kreiskegels habe die Länge a; wie groß sind die Höhe x und der Radius y der Basis des Kegels zu wählen, wenn sein Volumen V ein Maximum werden soll?

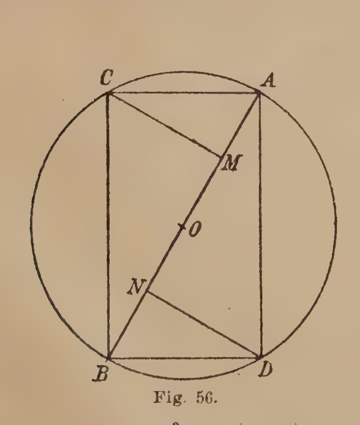


Fig. 56.

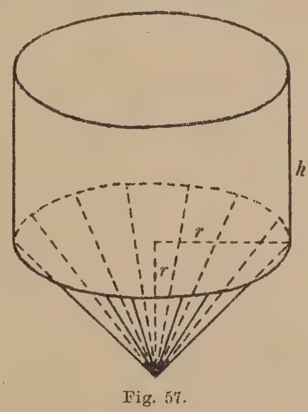


Fig. 57.

Aus $V = \frac{xy^2\pi}{3}$ läßt sich y vermöge $x^2 + y^2 = a^2$ sofort eliminieren; alsdann bleibt $V = \frac{1}{3}\pi x(a^2 - x^2)$. Für $x = \frac{1}{3}a\sqrt{3}, y = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$ wird V ein Max.

45. Das Volumen V eines oben offenen Gefäßes von der Gestalt eines Kreiszylinders mit kegelförmigem Boden soll bei gegebener Oberfläche O ein Maximum sein; die Höhe des Kegels sei gleich dem Radius r des Zylinders. Wie groß sind r und die Höhe h des Zylinders zu machen? (Fig. 57.)

Zunächst ist $V = r^2\pi h + \frac{1}{3}r^3\pi$, und hierzu tritt

$$O = 2r\pi h + r^2\pi\sqrt{2};$$

durch Elimination von h folgt $V = \frac{Or}{2} - \frac{r^3\pi}{2}\sqrt{2} + \frac{r^3\pi}{3}$.

Man findet $r^2 = \frac{O}{(3\sqrt{2}-2)\pi} = 0{,}1419\ O$, $r = 0{,}3767\ \sqrt{O}$; die Höhe h folgt mit Hilfe von $O = 2r\pi h + r^2\pi\sqrt{2}$.

46. Man beweise den Satz von Steiner[1]): „Sind von zwei rechtwinkligen Dreiecken von jedem eine Kathete und ist die Summe der beiden übrigen Katheten gegeben, so ist die Summe der Hypotenusen ein Minimum, wenn die Dreiecke ähnlich sind.“

Es seien a und y die Katheten des einen, a_1 und y_1 die Katheten des anderen Dreiecks, z und z_1 die zugehörigen Hypotenusen, m sei die gegebene Summe $y + y_1$. Hier muß

$$z + z_1 = \sqrt{y^2 + a^2} + \sqrt{(m-y)^2 + a_1^2}$$

ein Min. werden, eine Forderung, die erfüllt wird, wenn

$$y : \sqrt{y^2 + a^2} = (m-y) : \sqrt{(m-y)^2 + a_1^2}$$

ist.

47. Eine Seite eines Rechtecks liegt auf der x-Achse eines Koordinatensystems und wird durch dessen Anfangspunkt halbiert; die Endpunkte der Gegenseite liegen auf der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Welche Koordinaten haben diese Endpunkte, wenn der Inhalt J des Rechtecks möglichst groß sein soll?

$J = 2xy = \frac{2bx}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ wird ein Maximum für $x = \pm\frac{a}{2}\sqrt{2}$, $y = +\frac{b}{2}\sqrt{2}$ und zwar ist ab der Betrag dieses Maximums.

48. Das Querprofil eines offenen Kanals bildet ein gleichschenkliges Trapez vom Flächeninhalt J; der Böschungswinkel sei α. Wie tief muß der Kanal gemacht werden, wenn der Reibungswiderstand ein Minimum, also der benetzte Teil des Trapezumfanges ein Minimum sein soll? Man zeige, daß bei der dieser Forderung entsprechenden Tiefe die Breite AD des Querschnitts am oberen Rande doppelt so groß wie eine Seitenlinie AB ist (Fig. 58).

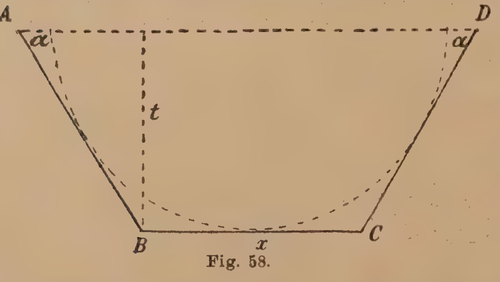


Fig. 58.

1) Journal für die reine und angew. Math. Bd. 24 (1842), S. 222 = Ges. Werke Bd. 2, S. 280.

Man setze $BC = x$, die Tiefe gleich t; die Funktion $u = x + \frac{2t}{\sin\alpha}$ soll ein Minimum werden, wobei $J = xt + t^2 \cot\alpha$ ist. Mit Rücksicht auf diese letzte Gleichung folgt $u = \frac{J}{t} - t\cot\alpha + \frac{2t}{\sin\alpha}$, und dieser Ausdruck wird für $t = \sqrt{\frac{J \sin\alpha}{2 - \cos\alpha}}$ ein Minimum. Aus $AD = x + 2t\cot\alpha$ folgt dann leicht $AD = 2AB$. Wird nun von der Mitte der Strecke AD auf AB ein Lot p gefällt, so ist $\sin\alpha = p : \frac{1}{2}AD = p : AB$; wegen $\sin\alpha = t : AB$ folgt daher $t = p$, und hieraus geht hervor, daß die Seiten AB, BC, CD des Trapezes einen um die Mitte von AD beschriebenen Halbkreis vom Radius t berühren. Der als *Profilradius* oder *mittlere hydraulische Tiefe* bezeichnete Quotient aus dem Flächeninhalt J und dem benetzten Teil des Trapezumfanges wird:

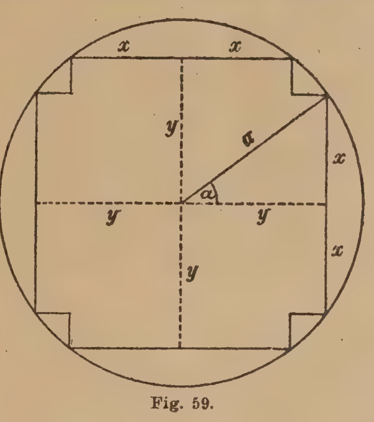


Fig. 59.

$$r = \frac{J}{x + 2AB} = \frac{J}{x + AD} = \frac{J}{2(x + t\cot\alpha)} = \frac{t}{2},$$

also von α unabhängig.

49. Beim Bau der Wechselstromtransformatoren ist es von Wichtigkeit, das Innere einer Spule von kreisförmigem Querschnitt durch einen Eisenkern von kreuzförmigem Querschnitt möglichst auszufüllen. Wie sind alsdann die aus der Figur 59 ersichtlichen Dimensionen x, y des kreuzförmigen Querschnittes zu wählen, wenn a der Radius der Spule ist?

Der Schnitt durch den Eisenkern hat den Inhalt

$$J = 4xy + 4x(y - x) = 4(2xy - x^2),$$

und dieser Ausdruck verwandelt sich bei Einführung des Winkels α vermöge $x = a\sin\alpha$, $y = a\cos\alpha$ in $J = 4a^2(\sin 2\alpha - \sin^2\alpha)$. Er wird ein Maximum für $\operatorname{tg} 2\alpha = 2$, $\sphericalangle\,\alpha = 31^0\,43'\,1''$; alsdann ist $x = 0{,}526\,a$, $y = 0{,}851\,a$, $J = 2{,}472\,a^2$, es werden $78{,}7\,\%$ der ganzen Kreisfläche ausgenutzt.

50. Für die Stromstärke J eines galvanischen Elementes, bei dem die elektromotorische Kraft gleich E, der innere Widerstand gleich w, der Widerstand im äußeren Stromkreis (in der Leitung) gleich W ist, gilt bekanntlich die das Ohmsche Gesetz darstellende Formel (vgl. Aufg. 19, S. 112):

$$J = \frac{E}{w + W}.$$

Zwei galvanische Elemente lassen sich nun auf zwei verschiedene Arten verbinden. Besteht nämlich z. B. jedes dieser Elemente aus einer Zink- und einer Kupferplatte, die in ein Gefäß mit verdünnter Schwefelsäure tauchen, so lassen sich diese Elemente entweder *ungleichnamig* verbinden, d. h. die Kupferplatte des einen mit der Zinkplatte des anderen, oder *gleichnamig*, d. h. die beiden Kupferplatten werden unter sich verbunden, ebenso die beiden Zinkplatten. Diesen beiden Fällen entsprechend sagt man auch, die Elemente seien *hintereinander* geschaltet, bzw. *nebeneinander* oder *parallel* geschaltet.

Werden zwei gleiche Elemente hintereinander geschaltet, so wirkt eine doppelte elektromotorische Kraft, aber auch der innere Widerstand w ist doppelt so groß, die Stromstärke wird daher $J = 2E : (2w + W)$, und für n hintereinander geschaltete Elemente ist offenbar

$$J = \frac{nE}{nw + W} = \frac{E}{w + \frac{W}{n}},$$

die Stromstärke also gerade so groß, als wenn man bei dem ursprünglichen *einen* Element den Widerstand W in der Leitung auf den n^{ten} Teil reduziert hätte. Offenbar ist eine solche Verbindung vorteilhaft, wenn W sehr groß ist, also z. B. bei Telegraphenleitungen.

Werden zwei Elemente nebeneinander geschaltet, so hat dies dieselbe Wirkung, als wenn man bei einem Element die Plattenoberfläche verdoppelt, somit seinen inneren Widerstand auf die Hälfte reduziert hätte, da der Strom im Element nun durch einen doppelt so großen Querschnitt fließt. Die elektromotorische Kraft E ist hingegen von der Größe der Platten unabhängig. Daher wird nun $J = E : \left(\frac{w}{2} + W\right)$ und für n nebeneinander geschaltete Elemente:

$$J = \frac{E}{\frac{w}{n} + W}.$$

Ist W nicht groß, so findet also eine Erhöhung der Stromstärke statt, wenn die Elemente nebeneinander geschaltet werden.

Man kann nun fragen, wie n Elemente zu verbinden sind, damit die von der galvanischen Batterie gelieferte Stromstärke möglichst groß wird. Dabei beschränke man sich auf den Fall, wo die Elemente alle gleich sind, also jedes die elektromotorische Kraft E und den inneren Widerstand w hat; der Widerstand im äußeren Stromkreis sei W. Ferner sei die Verbindung symmetrisch, d. h. je y Elemente mögen nebeneinander geschaltet werden, also gewissermaßen ein Element von y mal kleinerem inneren Widerstand darstellen, und die so entstehenden $x = n : y$ Reihen von Elementen werden nun hintereinander geschaltet. Wie sind x und y zu wählen, damit die Stromstärke J ein Maximum werde?

Hier wird $J = \frac{E}{\frac{w}{y} + \frac{W}{x}}$, oder mit Rücksicht auf $xy = n$ wird

$$J = \frac{E}{\frac{wx}{n} + \frac{W}{x}}.$$

Man findet $x = \sqrt{\frac{Wn}{w}}$, $y = \sqrt{\frac{wn}{W}}$ und als maximale Stromstärke $J = \frac{E\sqrt{n}}{2\sqrt{Ww}}$. Natürlich werden x und y irrationale Zahlen sein, während hier doch nur ganzzahlige x, y einen Sinn haben; man wird bei der Zusammensetzung der Batterie für x und y die ganzen Zahlen wählen, die den berechneten irrationalen Zahlen am nächsten liegen.

51. Unter welchem Winkel muß ein Lichtstrahl in die eine Seitenfläche eines dreiseitigen Prismas eintreten, wenn die Ablenkung, die er durch die Brechungen beim Durchgang durch das Prisma erfährt, ein Minimum sein soll? Der Winkel, unter dem sich die Eintritts- und Austrittsfläche des Prismas schneiden, sei α, der Brechungsindex sei n, und zwar soll $n > 1$ angenommen werden, mithin das Prisma optisch dichter als das umgebende Medium sein.

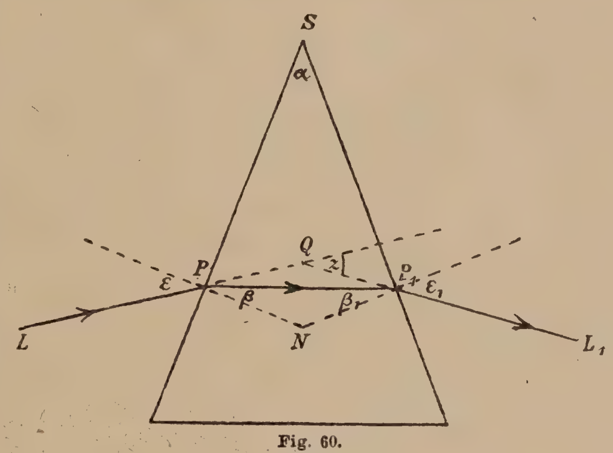


Fig. 60.

Der Richtungsunterschied zwischen dem in P in das Prisma eintretenden und in P_1 austretenden Lichtstrahl ist durch den Winkel z gegeben (Fig. 60), und zwar findet man $z = \sphericalangle QPP_1 + \sphericalangle QP_1P = \varepsilon - \beta + \varepsilon_1 - \beta_1 = \varepsilon + \varepsilon_1 - \alpha$, da $\beta + \beta_1 = \alpha$ ist. Hierzu treten die Gleichungen $\sin\varepsilon = n \sin\beta$, $\sin\varepsilon_1 = n\sin\beta_1$, vermöge deren ε und ε_1 als Funktionen von β darstellbar sind; es folgt $\varepsilon = \arcsin(n\sin\beta)$ und $\varepsilon_1 = \arcsin[n\sin(\alpha - \beta)]$. Nun muß $\frac{dz}{d\beta} = \frac{d\varepsilon}{d\beta} + \frac{d\varepsilon_1}{d\beta_1}\cdot\frac{d\beta_1}{d\beta}$, wo $\frac{d\beta_1}{d\beta} = -1$ ist, verschwinden. Nach Aufg. 25, S. 12 ist

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\beta_1} = \frac{n}{+\sqrt{1-(n^2-1)\operatorname{tg}^2\beta}},$$

somit folgt $\operatorname{tg}^2\beta = \operatorname{tg}^2\beta_1$ oder $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\beta_1$, $\beta = \beta_1$, da β und $\beta_1 < \frac{1}{2}\pi$. Man hat daher $\beta = \beta_1 = \frac{\alpha}{2}$ und $\varepsilon = \varepsilon_1$. Ferner wird

$$\frac{d^2 z}{d\beta^2} = \frac{n(n^2-1)\operatorname{tg}\beta}{[1-(n^2-1)\operatorname{tg}^2\beta]^{\frac{3}{2}}\cos^2\beta} + \frac{n(n^2-1)\operatorname{tg}\beta_1}{[1-(n^2-1)\operatorname{tg}^2\beta_1]^{\frac{3}{2}}\cos^2\beta_1},$$

und dieser Ausdruck ist positiv. Der Winkel ε, für den $\sin\varepsilon = n\sin\frac{1}{2}\alpha$ ist, liefert also ein Min. $z = \delta$ der Ablenkung; dieses beträgt $\delta = 2\varepsilon - \alpha$. Hieraus folgt $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha + \delta)$ und $n\sin\frac{1}{2}\alpha = \sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta)$ oder $n = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$, eine Gleichung, die zur Bestimmung des Brechungsindex aus dem Ablenkungswinkel δ dient, wenn sich das Prisma in der „Minimumstellung" befindet.[1]) Man erkennt leicht, daß bei dieser Stellung der Strahl im Inneren des Prismas mit den zwei brechenden Flächen gleiche Winkel bildet (symmetrischer Durchgang, da $SP = SP_1$ und $\varepsilon = \varepsilon_1$).

II. Funktionen von mehreren Veränderlichen ohne Nebenbedingungen.

1. Zur Bestimmung der Werte der *zwei* voneinander unabhängigen Veränderlichen x, y, die die Funktion $z = f(x, y)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, löse man die Gleichungen $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ nach x und y auf. Ist $x = a$, $y = b$ ein Paar reeller Lösungen, so wird z für diese Werte ein Maximum oder Minimum, wenn der Ausdruck

$$\Delta = f_{11} f_{22} - f_{12}^2$$

bei Einführung von $x = a$, $y = b$ einen *positiven* Wert hat, und zwar liegt ein Maximum vor, wenn f_{11} oder f_{22} negativ ist, ein Minimum, wenn f_{11} oder f_{22} positiv ist. Ist Δ negativ, so hat die Funktion an der betreffenden Stelle keinen extremen Wert und im Fall $\Delta = 0$ bedarf die Frage einer weitergehenden Untersuchung, bei der noch höhere partielle Ableitungen zu berücksichtigen sind.

Nimmt $f(x, y)$ für $x = a$, $y = b$ einen extremen Wert an, so hat jedenfalls die Fläche $z = f(x, y)$ an dieser Stelle eine zur xy-Ebene parallele Tangentialebene.

2. Zur Bestimmung der Werte der n voneinander unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die die Funktion $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, löse man die n Gleichungen $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $(i = 1, 2, \ldots n)$ nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf. Ein solches Lösungensystem liefert einen extremen Wert der Funktion f, falls für alle endlichen und nicht gleichzeitig verschwindenden Werte von $h_1, h_2, \ldots h_n$ der Ausdruck

$$H = f_{11} h_1^2 + f_{22} h_2^2 + \cdots + f_{nn} h_n^2 + 2 f_{12} h_1 h_2 + \cdots + 2 f_{n-1,n} h_{n-1} h_n$$

1) Vgl. zu dieser experimentellen Bestimmung des Brechungsindex z. B. F. Kohlrausch „Lehrbuch der praktischen Physik", 10. Aufl., Leipzig 1905, S. 257 f.

stets gleiches Vorzeichen hat (eine definite Form ist). Je nachdem dann dieser Ausdruck negativ oder positiv ist, wird die Funktion ein Maximum oder Minimum. Verschwindet H für gewisse Wertsysteme der $h_1, h_2, \ldots h_n$, behält H jedoch gleiches Vorzeichen für alle anderen Werte dieser Größen (ist H eine semidefinite Form), so bedarf die Frage einer weitergehenden Untersuchung.

3. Vorausgesetzt wird im vorstehenden, daß die Funktionen $f(x, y)$ bzw. $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ mit allen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in der nächsten Umgebung der betreffenden Stelle x, y bzw. $x_1, x_2, \ldots x_n$ stetig sind.

Beispiele.

1. Welche Werte x, y machen die Funktion $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$ zu einem Maximum oder Minimum?

Für $x = -\frac{3}{8}$, $y = -\frac{37}{24}$ wird z ein Min.

2. Die gleiche Aufgabe für $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

Für $x = 5$, $y = 6$ wird z ein Min.

3. Die gleiche Aufgabe für $z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$.

Im Fall $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ nimmt z für $x = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$, $y = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$ einen extremen Wert an, und zwar wird z ein Max. oder Min., je nachdem a_{11} (oder a_{22}) negativ oder positiv ist.

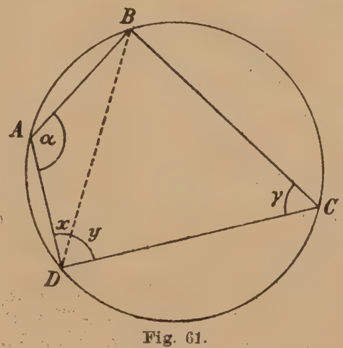


Fig. 61.

4. Einem gegebenen Kreis (Radius a) soll ein Viereck $ABCD$ von möglichst großem Flächeninhalt eingeschrieben werden; die Größe des Winkels $BAD = \alpha$ sei gegeben. Man zeige, daß das gesuchte Viereck erhalten wird, wenn man an einen Durchmesser AC des Kreises (Diagonale des Vierecks) von A aus die Winkel $CAB = CAD = \frac{1}{2}\alpha$ anträgt (Fig. 61) und die Schnittpunkte B, D der freien Schenkel dieser Winkel und des Kreises mit C verbindet.

Ist $\sphericalangle BDA = x$, $\sphericalangle BDC = y$, setzt man ferner $\sphericalangle BCD = 180^0 - \alpha = \gamma$ und den Inhalt des Vierecks gleich F, so gilt die Gleichung $\frac{F}{2a^2 \sin \alpha} = \sin x \sin(x + \alpha) + \sin y \sin(y + \gamma)$, und diese Funktion von x und y soll ein Max. werden. Mit Hilfe von $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ findet man $x = \frac{1}{2}\gamma$, $y = \frac{1}{2}\alpha$, $x + y = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 90^0$, $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\gamma$, $\sphericalangle CBD = \frac{1}{2}\alpha$, $AB = AD$ sowie $CB = CD$. Die Bedingungen $F_{11}F_{22} - F_{12}^2 > 0$ und $F_{11} < 0$ sind erfüllt.

5. Zwei Orte P_1 und P_2 haben von zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden (y-Achse und x-Achse) die Abstände $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ bzw. $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$ und zwar mögen diese Koordinaten sämtlich positiv sein. Beide Orte sollen durch eine Telegraphenleitung verbunden werden, jedoch nicht direkt, sondern so, daß die Leitung von P_1 zunächst nach einem Punkt Q_1 des positiven Teiles der x-Achse, von da nach einem Punkt Q_2 des positiven Teiles der y-Achse und dann erst nach P_2 geführt wird (Fig. 62). Wie sind Q_1 und Q_2 auf der x-Achse bzw. y-Achse anzunehmen, damit die Länge der Leitung

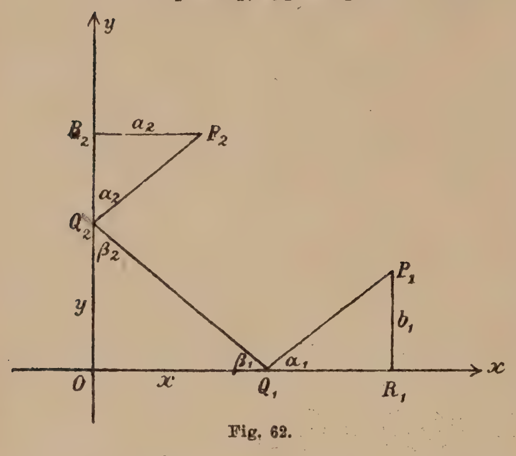


Fig. 62.

$$w = P_1 Q_1 + Q_1 Q_2 + Q_2 P_2$$

ein Min. wird? Vgl. auch Aufg. 21, S. 114.

Setzt man $OQ_1 = x$, $OQ_2 = y$, so wird $w = \sqrt{b_1^2 + (a_1 - x)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{a_2^2 + (b_2 - y)^2}$. Bei Einführung der Winkel α_1, β_1, α_2, β_2 ergibt die geometrische Deutung der Gleichungen $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$, daß $\cos\alpha_1 = \cos\beta_1$, $\cos\beta_2 = \cos\alpha_2$, somit $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ wird, d. h. die Dreiecke $P_1 R_1 Q_1$, $Q_1 O Q_2$ und $Q_2 R_2 P_2$ müssen einander ähnlich sein. Die Bestimmung von x und y erfolgt nun leicht mit Hilfe von $b_1 : (a_1 - x) = y : x = (b_2 - y) : a_2$ und liefert

$$x = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 + b_2}, \quad y = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 + a_2},$$

wo $a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$ sein muß, wenn x und y positiv werden sollen, d. h. die Radienvektoren von P_1 und P_2 müssen so zueinander gelegen sein, wie die positive x-Achse zur positiven y-Achse. Man konstruiert Q_1 und Q_2, indem man die Lote $P R_1$ und $P_2 R_2$ über R_1 und R_2 hinaus um sich selbst verlängert und die Endpunkte dieser Verlängerungen miteinander verbindet. Diese Verbindungslinie trifft die Koordinatenachsen in Q_1 und Q_2. Die kürzeste Weglänge wird $\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$.

6. An drei Orten P_1, P_2, P_3 werden gewisse technische Produkte gewonnen, die vor ihrer weiteren Verwendung nach einer Zentralstelle P befördert werden sollen. Diese Transportkosten betragen für je einen Kilometer (kilometrische Transportkosten) bzw. a_1, a_2, a_3 Mark. Es wird gefragt, welche Lage man P zu geben hat, damit die Summe K der Kosten für den Transport von P_1, P_2 und P_3 nach P ein Minimum wird, und zwar sollen die zur Beantwortung dieser Frage

notwendigen Gleichungen nicht aufgelöst, sondern geometrisch oder mechanisch gedeutet werden. Man beachte insbesondere auch den Fall $a_1 = a_2 = a_3$. Die Koordinaten der Punkte P_i seien x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$, die unbekannten Koordinaten von P seien x, y.

Man findet $K = \sum_{1}^{3} a_i \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$. Sind nun $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ die Winkel, die die von P_i nach P gezogenen Geraden mit der positiven Richtung der x-Achse bilden, so erweisen sich die Gleichungen $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ als gleichbedeutend mit

$$a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3 = 0 \quad \text{und} \quad a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3 = 0.$$

Werden die Größen a_1, a_2, a_3 als Kräfte aufgefaßt, die in P angreifen und durch P_1, P_2, P_3 hindurchgehen, so sagen beide Gleichungen aus, daß die Summen der Projektionen dieser Kräfte auf die Achsen des Koordinatensystems verschwinden, d. h. die Kräfte müssen sich im Gleichgewicht befinden.

Mit Hilfe von

$$a_1 : a_2 : a_3 = \sin(\alpha_2 - \alpha_3) : \sin(\alpha_3 - \alpha_1) : \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

folgt überdies, daß die von je zweien der Geraden $P_i P$ im Punkt P gebildeten Winkel mit den Außenwinkeln eines Dreiecks übereinstimmen, dessen Seitenlängen den kilometrischen Transportkosten proportional sind. Im Fall $a_1 = a_2 = a_3$ betragen diese Winkel je 120^0.

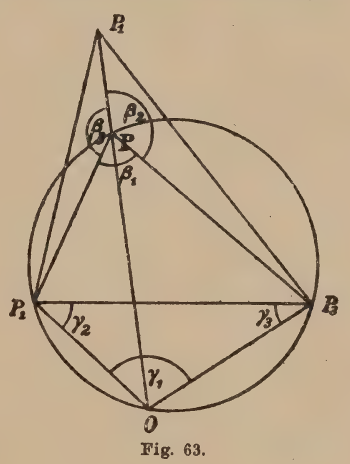


Fig. 63.

W. Launhardt hat zur *Konstruktion* des Punktes P das folgende Verfahren angegeben[1]): Mit Hilfe der Seiten $p_1 = P_2 P_3$, $p_2 = P_3 P_1$, $p_3 = P_1 P_2$ des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ konstruiert man über $P_2 P_3$ ein Dreieck $P_2 P_3 O$, in dem $P_3 O = \frac{a_2}{a_1} p_1$, $P_2 O = \frac{a_3}{a_1} p_1$ ist und zwar derart, daß sich die Flächen $P_2 P_1 P_3$ und $P_2 O P_3$ von $P_2 P_3$ aus nach entgegengesetzten Seiten erstrecken (Fig. 63). Die Verbindungslinie von P_1 mit O trifft alsdann den dem Dreieck $P_2 P_3 O$ umschriebenen Kreis in dem gesuchten Punkt P. Die Seiten dieses Dreiecks sind nämlich proportional zu a_1, a_2, a_3, seine Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind gleich den Supplementwinkeln der von je zweien der Geraden $P P_i$ im Punkt

---

1) Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure Bd. 26 (1882), S. 105—108; ferner „Theorie des Trassierens", Heft 1, Hannover 1887, S. 35 ff. Für den Fall $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ hat diese Konstruktion schon J. F. Fagnano in den Nova acta eruditorum anni 1775, Leipzig 1779, S. 284 ff.

P gebildeten Winkel $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, denn man erkennt leicht, daß $\beta_1 + \gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2 = \beta_3 + \gamma_3 = 180^0$ ist. Das dem gefundenem Punkt P zugehörige Minimum des Ausdrucks $a_1 \cdot PP_1 + a_2 \cdot PP_2 + a_3 \cdot PP_3$ wird durch das Produkt $a_1 \cdot P_1 O$ dargestellt.

Vorausgesetzt ist hierbei, daß die Gerade $P_1 O$ den Hilfskreis in einem Punkt P trifft, der im Innern des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ liegt. Sollte dies nicht der Fall sein, so wird eine Ecke dieses Dreiecks das Minimum liefern. Dies tritt z. B. schon ein, wenn $a_1 = a_2 = a_3$ ist und ein Winkel des Dreiecks $\geqq 120^0$ ist; dann liefert der Scheitel des stumpfen Winkels die Lösung. Auch muß es überhaupt möglich sein, das Dreieck $P_2 P_3 O$ zu konstruieren, d. h. die Summe irgend zweier der Zahlen a_1, a_2, a_3 muß größer sein als die dritte.

Im Anschluß an die oben erwähnte *mechanische* Deutung der Gleichungen

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 = 0 \text{ und } a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 = 0$$

kann man den Punkt P *experimentell* bestimmen, indem man ein dem Dreieck $P_1 P_2 P_3$ ähnliches Dreieck auf eine ebene Platte aufzeichnet, diese in P_1, P_2, P_3 durchbohrt und die freien Enden dreier in einem Knoten zusammengeknüpften Fäden durch diese Löcher hindurchführt. Werden an die freien Enden der Fäden Gewichte gehängt, die den kilometrischen Transportkosten proportional sind, so befindet sich der Knoten in der Gleichgewichtslage dieses Systems an der gesuchten Stelle P.[1])

7. Die tägliche Arbeitsleistung L von Zugtieren, die zur Fortbewegung von Straßenfuhrwerken benutzt werden, ist gleich dem Produkt aus der Zugkraft z, der Geschwindigkeit v und der täglichen Arbeitszeit t (Arbeit gleich dem Produkt aus Kraft und Weg); man hat daher $L = zvt$. Soll nun diese Größe L unverändert bleiben, so muß sich bei Änderung von v und t auch z ändern, und zwar möge bei dieser Änderung die Forderung erfüllt werden, daß die konstante Tagesleistung L dem Maximum des Produktes zvt entspreche, das für gewisse mittlere Werte z_1, v_1, t_1 von z, v, t eintreten möge. Es soll

---

1) Diese auf den Fall von beliebig vielen Punkten P_i ausdehnbare Bemerkung hat wohl H. C. Schumacher zuerst ausgesprochen und zwar in einem Brief an Gauß vom Jahr 1836; vgl. den von Peters herausgegebenen „Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher", Bd. 3, Altona 1861, S. 28; vgl. ferner hierzu im gleichen Band S. 13—14, 24 f., 26—28, 30—32, 39—40, 44—45. Die Bemerkung, daß $\sum_i a_i \cos \alpha_i = 0$, $\sum_i a_i \sin \alpha_i = 0$ ist, findet sich für $a_i = 1$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, auch bei Steiner; vgl. überhaupt dessen Bemerkungen in seinen hinterlassenen Papieren, in den gesammelten Werken Bd. 2, S. 729—731. Vgl. auch R. Sturm im Journal für die reine und angew. Mathematik Bd. 97 (1884), S. 49—61; A. Foeppl in der Schweizerischen Bauzeitung Bd. 3 (1884), S. 86 f. Ferner sei bezüglich einer Verallgemeinerung der Aufgabe verwiesen auf V. Schlegel, Bull. Americ. math. soc. Bd. 1 (1894), S. 33—52.

also $L_{\max} = z_1 v_1 t_1$ sein. Man zeige, daß dieser Forderung genügt wird, wenn die von Maschek aufgestellte Formel

$$z = z_1 \left(3 - \frac{v}{v_1} - \frac{t}{t_1}\right)$$

zu Grund gelegt wird, für die die Ergebnisse der Erfahrung einigermaßen zutreffen, wenn v und t nicht allzusehr von den mittleren Werten v_1, t_1 abweichen.[1])

Für $L = z_1 \left(3 - \frac{v}{v_1} - \frac{t}{t_1}\right) vt$ liefern die Gleichungen $\frac{\partial L}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ die Werte $v = v_1$, $t = t_1$. Ferner wird $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \frac{\partial^2 L}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v \cdot \partial t}\right)^2 = 3 z_1^2 > 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$ und $\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} < 0$.

Bei Pferden kann man als Mittelwerte nehmen $z_1 = 75$ kg, $v_1 = 1{,}1$ m/sek, $t_1 = 8$ Stunden täglich.

8. Gegeben sind n Punkte P_i durch ihre Koordinaten x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots n)$. Für welchen Punkt $P(x, y)$ ist die Summe der mit gewissen positiven Konstanten m_i multiplizierten Quadrate der Abstände von den n festen Punkten ein Minimum?

Die genannte Summe ist $s = \sum_1^n m_i \{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\}$; aus $s_1 = 0$ und $s_2 = 0$ folgt

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Auch wird s tatsächlich ein Min. für die gefundenen Werte von x und y, da $s_{11} s_{22} - s_{12}^2$ und $s_{11} > 0$ wird. Ist P_i ein materieller Punkt von der Masse m_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, so ist P der Schwerpunkt des ganzen Systems.[2])

Häufig handelt es sich um die Bestimmung des Maximums oder Minimums einer Funktion von $n + 1$ Veränderlichen, zwischen denen *eine* Nebenbedingung stattfindet, vermöge deren man eine Veränderliche aus der Funktion eliminieren oder sich wenigstens eliminiert denken kann, so daß eine Funktion von n unabhängigen Veränderlichen bleibt. Alsdann ist das bisher benutzte Verfahren einzuschlagen.

Hierzu gehören folgende *Beispiele*:

9. Das Volumen V eines Rechtflachs sei gleich a^3; wie lang

---

1) Näheres bei Launhardt, Ztschr. des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover, Bd. 13, S. 199 ff. (1867), wo man zahlreiche Anwendungen findet, ferner bei L. von Willmann, „Straßenbau", Kap. 2, S. 94 des ersten Bandes vom Lehrbuch des Tiefbaues, hrsgg. von K. Esselborn, 3. Aufl. Leipzig 1908, S. 146 f.

2) Für den Fall $n = 3$ und $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ findet sich dieses Ergebnis schon bei J. F. Fagnano in den Nova acta eruditorum anni 1775, Leipzig 1779, S. 289.

müssen die Kanten x, y, z sein, wenn die Oberfläche O des Körpers ein Minimum werden soll?

Mit Hilfe von $xyz = a^3$ wird $O = 2\left(xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}\right)$; man findet $x = y = z = a$, das Rechtflach muß ein Würfel sein.

10. In der Ebene eines Dreiecks ABC einen Punkt P so zu bestimmen, daß die Summe der Flächeninhalte der drei Rechtecke, die man aus je zweien seiner Abstände von den Seiten des Dreiecks konstruieren kann, ein Maximum wird.

Es seien x, y, z diese Abstände und a, b, c die Längen der zugehörigen Dreiecksseiten; alsdann soll die Funktion $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ ein Max. werden, wozu die Bedingungsgleichung $ax + by + cz = 2D$ tritt, in der D den Dreiecksinhalt darstellt. Man denkt sich nun vermöge dieser Gleichung z aus $f(x, y, z)$ eliminiert und betrachtet hierauf f nur noch als Funktion der zwei unabhängigen Veränderlichen x und y. Alsdann ist $f_1 = y + y\frac{\partial z}{\partial x} + z + x\frac{\partial z}{\partial x}$ oder auch $f_1 = y - \frac{ay}{c} + z - \frac{ax}{c}$, $f_2 = x + z - \frac{by}{c} - \frac{bx}{c}$. Die Gleichungen $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ liefern $\sigma x = -a + b + c$, $\sigma y = a - b + c$, $\sigma z = a + b - c$, wo σ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, der mit Hilfe der Bedingungsgleichung gleich $-\frac{(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)}{2D}$ gefunden wird. Ferner ist

$$f_{11} = -\frac{2a}{c},\ f_{22} = -\frac{2b}{c},\ f_{12} = \frac{c - a - b}{c}$$

und $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = -(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) : c^2$ oder $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = \{a(-a + b + c) + b(a - b + c) + c(a + b - c)\} : c^2$, ein positiver Ausdruck, da a, b, c Seitenlängen eines Dreiecks sind und somit die Klammern, wie z. B. $-a + b + c$, positive Größen darstellen.

11. Es seien wieder x, y, z die Abstände eines Punktes P von den Seiten eines Dreiecks; welche Lage muß P haben, damit das Produkt $x^l y^m z^n$, wo l, m, n beliebige reelle Zahlen bedeuten, einen extremen Wert annimmt?

Hier findet man zunächst $\varrho x = l : a$, $\varrho y = m : b$, $\varrho z = n : c$, wo $\varrho = (l + m + n) : 2D$ ist und die Größen a, b, c, D dieselbe Bedeutung haben wie in der vorhergehenden Aufgabe. Ein extremer Wert tritt ein unter der Bedingung $(l + m + n)lmn > 0$ und zwar ein Max. oder Min., je nachdem die Größen $lm(l + m)$, $mn(m + n)$ und $nl(n + l)$ positiv oder negativ sind. Daß diese drei Größen im Fall $(l + m + n)lmn > 0$ dasselbe Vorzeichen haben, ist leicht zu zeigen. Im Fall $l = m = n$ ist P der Schwerpunkt des Dreiecks, und für diesen Punkt wird daher $(xyz)^l$ ein Max. oder Min., je nachdem l positiv oder negativ ist.

12. Für welchen Punkt in der Ebene eines Dreiecks ist die Summe der Quadrate seiner Abstände x, y, z von den Seiten des Dreiecks ein Minimum?

Man findet bei gleicher Bezeichnungsweise wie in den zwei vorhergehenden Aufgaben $\varrho x = a$, $\varrho y = b$, $\varrho z = c$, wo $\varrho = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2D}$ ist. Über diesen Punkt gibt es eine umfangreiche Literatur.[1]) Er pflegt nach Grebe[2]) oder auch nach Lemoine genannt zu werden und läßt sich leicht als Schnittpunkt der drei „Symmedianen" des Dreiecks konstruieren. Die zur Ecke A gehörige Symmediane wird hierbei erhalten, indem man die durch A gehende Halbierungstransversale der Seite a an der Winkelhalbierenden von A spiegelt; oder man trägt auf die Seite AB die Länge $AC' = AC$ ab, auf die Seite AC die Länge $AB' = AB$, die gesuchte Symmediane verbindet alsdann A mit der Mitte der Strecke $B'C'$.[3])

Übrigens ist der doppelte Dreiecksinhalt das geometrische Mittel von $a^2 + b^2 + c^2$ und $x^2 + y^2 + z^2$.

Werden die Größen x, y, z als rechtwinklige Koordinaten im Raum gedeutet, so ist mit vorliegender Aufgabe zugleich die folgende gelöst:

13. Den Punkt der Ebene $ax + by + cz - 2D = 0$ zu bestimmen, der vom Koordinatenanfang den kleinsten Abstand hat.

14. Den kürzesten Abstand der beiden Geraden

$$\frac{\xi - a}{l} = \frac{\eta - b}{m} = \frac{\zeta - c}{n} \quad \text{und} \quad \frac{\xi - a_1}{l_1} = \frac{\eta - b_1}{m_1} = \frac{\zeta - c_1}{n_1}$$

zu bestimmen.

Es seien x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Koordinaten je eines Punktes beider Geraden; alsdann soll der Ausdruck $s^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$ ein Min. werden. An Stelle der Koordinaten denke man sich nun vermöge

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n} = \varrho \quad \text{und} \quad \frac{x_1 - a_1}{l_1} = \frac{y_1 - b_1}{m_1} = \frac{z_1 - c_1}{n_1} = \varrho_1$$

die beiden voneinander unabhängigen Veränderlichen ϱ und ϱ_1 eingeführt; man hat alsdann:

$$s\frac{\partial s}{\partial \varrho} = (x - x_1)l + (y - y_1)m + (z - z_1)n = 0,$$

$$s\frac{\partial s}{\partial \varrho_1} = -\{(x - x_1)l_1 + (y - y_1)m_1 + (z - z_1)n_1\} = 0,$$

---

1) Diese findet sich z. B. zusammengestellt bei J. S. Mackay in den Proceedings of the Edinburgh math. society, Bd. 11 (1893), S. 92—103.

2) Vgl. dessen Abhandlung in Grunerts Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 9 (1847), S. 250ff. Schon die Schrift von C. Adams „Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks", Winterthur 1846, soll zahlreiche Sätze über diesen Punkt enthalten.

3) Vgl. hierzu M. d' Ocagne in den Nouv. Annales de Mathématiques, 3. Serie, Bd. 2, S. 450—464 (1883), wo der Name Symmediane eingeführt wird und mehrere Sätze abgeleitet werden.

somit

$$x - x_1 = \sigma L, \quad y - y_1 = \sigma M, \quad z - z_1 = \sigma N,$$

wo σ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet und zur Abkürzung gesetzt ist

$$mn_1 - nm_1 = L, \quad nl_1 - ln_1 = M, \quad lm_1 - ml_1 = N.$$

Werden die Differenzen $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ durch ϱ und ϱ_1 ausgedrückt, so hat man nun drei Gleichungen mit drei Unbekannten $\varrho, \varrho_1, \sigma$. Die Auflösung nach σ ergibt

$$\sigma = \frac{(a - a_1)L + (b - b_1)M + (c - c_1)N}{L^2 + M^2 + N^2},$$

und der kürzeste Abstand wird daher

$$d = \sigma\sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = \frac{(a - a_1)L + (b - b_1)M + (c - c_1)N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Dieser Abstand ist auch tatsächlich ein Min., weil

$$s^2\left\{\frac{\partial^2 s}{\partial \varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial \varrho_1^{\,2}} - \left(\frac{\partial^2 s}{\partial \varrho \cdot \partial \varrho_1}\right)^2\right\} \text{ gleich } L^2 + M^2 + N^2,$$

also positiv ist und gleiches von $s\dfrac{\partial^2 s}{\partial \varrho^2} = l^2 + m^2 + n^2$ gilt.

Für die Koordinaten der Endpunkte der den kürzesten Abstand darstellenden Strecke findet man

$$x = a + l\varrho,\ y = b + m\varrho,\ z = c + n\varrho,\ x_1 = a_1 + l_1\varrho_1,\ y_1 = b_1 + m_1\varrho_1,\ z_1 = c_1 + n_1\varrho_1,$$

wo

$$(L^2 + M^2 + N^2)\varrho = \begin{vmatrix} a_1 - a & l_1 & L \\ b_1 - b & m_1 & M \\ c_1 - c & n_1 & N \end{vmatrix}, \quad (L^2 + M^2 + N^2)\varrho_1 = \begin{vmatrix} a_1 - a & l & L \\ b_1 - b & m & M \\ c_1 - c & n & N \end{vmatrix}.$$

Das Verschwinden des den Zähler von d bildenden Ausdrucks $(a - a_1)L + (b - b_1)M + (c - c_1)N$ bedeutet, daß sich die beiden Geraden schneiden.

15. Man soll eine gegebene positive Zahl a derart in $n + 1$ positive Summanden $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ zerlegen, daß die Summe der m^{ten} Potenzen dieser Zahlen ein Minimum wird; hierbei sei $m > 1$.

Aus $z = x^m + x_1^{\,m} + x_2^{\,m} + \cdots + x_n^{\,m}$ denke man sich x vermöge $x = a - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ eliminiert; alsdann wird $\dfrac{\partial z}{\partial x_i} = m(x_i^{\,m-1} - x^{m-1}) = 0$ und $x = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{a}{n+1}$. Ferner findet man

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^{\,2}} = m(m-1)(x^{m-2} + x_i^{\,m-2}), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = m(m-1)x^{m-2},$$

so daß der oben (S. 132) mit H bezeichnete Ausdruck gleich

$$m(m-1)\left\{\sum_1^n{}^i x_i^{\,m-2} \cdot h_i^{\,2} + x^{m-2} \cdot \left(\sum_1^n{}^i h_i\right)^2\right\}$$

wird und eine positive definitive Form darstellt.

Aus dem Ergebnis folgt offenbar die Ungleichung

$$\left(\frac{x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n+1}\right)^m < \frac{x^m + x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m}{n+1},$$

falls $m > 1$ ist.

16. Man soll eine gegebene positive Zahl a derart in $n + 1$ positive Summanden $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ zerlegen, daß das Produkt $z = x^\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, in dem $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ beliebig gegebene positive Zahlen sind, ein Maximum wird.

Mit z wird auch $\ln z = \alpha \ln x + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \cdots + \alpha_n \ln x_n$ ein Maximum. Man denke sich nun x eliminiert vermöge $x = a - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ und bilde $\frac{\partial \ln z}{\partial x_i} = \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i} - \frac{\alpha}{x} = 0$, $(i = 1, 2, \ldots n)$, woraus

$$x = \frac{a\alpha}{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}, \quad x_i = \frac{a\alpha_i}{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

hervorgeht. Ferner findet man

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = -\frac{z\alpha_i}{x_i^2} - \frac{z\alpha}{x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{z\alpha}{x^2},$$

der oben (S. 132) mit H bezeichnete Ausdruck wird gleich

$$-z\left\{\sum_1^n{}^i \frac{\alpha_i}{x_i^2} h_i^2 + \frac{\alpha}{x^2}\left(\sum_1^n{}^i h_i\right)^2\right\},$$

stellt also eine negative definitive Form dar, folglich wird z für die gefundenen Werte der n Summanden von a tatsächlich ein Maximum.

17. Es sollen $n + 1$ positive Zahlen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ derart bestimmt werden, daß die Summe ihrer Quadrate konstant gleich a^2 ist, während der Ausdruck $z = \alpha x + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, in dem $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ beliebig gegebene positive Zahlen bedeuten, ein Maximum werden soll.

Auch hier denke man sich x aus z vermöge $x^2 = a^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$ eliminiert. Man findet $\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\alpha x_i}{x} + \alpha_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots n)$ und erhält

$$x = \frac{a\alpha}{+\sqrt{\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}}, \quad x_i = \frac{a\alpha_i}{+\sqrt{\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}}.$$

Ferner wird $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = -\frac{\alpha}{x^3}(x^2 + x_i^2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{\alpha x_i x_k}{x^3}$; der oben (S. 132) mit H bezeichnete Ausdruck erhält die Gestalt

$$-\frac{\alpha}{x^3}\left\{x^2 \sum_1^n{}^i h_i^2 + \left(\sum_1^n{}^i h_i x_i\right)^2\right\},$$

ist also eine negative definitive Form, die gefundenen Werte der Unbekannten ergeben für z ein Maximum.

18. In der Physik, der Technik, Geodäsie, Astronomie und anderen Wissenszweigen handelt es sich häufig darum, Größen aus Gleichungen zu berechnen, die durch Beobachtungen gewonnen werden. Infolge der Unvollkommenheit der Instrumente und unsrer Sinne sowie in Folge zufälliger äußerer Umstände entstehen Beobachtungsfehler, die die Ergebnisse störend beeinflussen; so kommt es, daß aus wiederholten Beobachtungen *verschiedene* Ergebnisse für diese Größen folgen. Nehmen wir z. B. an, drei Größen x, y, z seien durch Gleichungen von der Form $a_i x + b_i y + c_i z - d_i = 0$ verbunden, in denen die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i entweder sämtlich oder zum Teil durch Beobachtungen gewonnen werden können. Auch möge vorausgesetzt werden, daß die Beobachtungen gleiche Zuverlässigkeit haben, also kein Grund vorliegt, eine derselben für wertvoller zu halten als eine andere. Man wird alsdann den schädlichen Einfluß der Beobachtungsfehler durch Vermehrung der Zahl der Beobachtungsreihen bekämpfen, also nicht nur drei Reihen von Beobachtungen anstellen, denen alsdann drei Gleichungen $(i = 1, 2, 3)$ zur Berechnung der Unbekannten x, y, z zugehören würden, sondern $n > 3$ Reihen. Würde man in diese so erhaltenen n Gleichungen die wahren Werte der Unbekannten x, y, z, sofern man sie hätte, einsetzen, so würden die Gleichungen nicht sämtlich erfüllt werden, ihre rechten Seiten würden also nicht sämtlich gleich Null sein, sondern gleich gewissen Größen $\delta_i (i = 1, 2, \dots n)$, die die vorliegenden Fehler oder Widersprüche darstellen.

Nun fragt es sich, wie man diese Widersprüche, die zwischen den Gleichungen bestehen, möglichst ausgleicht, um die plausibelsten Werte der Unbekannten zu finden. Gauß hat aus verschiedenen Gründen die Schlußfolgerung gezogen, daß die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten diejenigen sind, für die die *Summe der Fehlerquadrate ein Minimum* wird. Die Methode der Berechnung der Unbekannten, die sich auf diese Forderung gründet, heißt daher die *Methode der kleinsten Quadrate.*[1]) Es sollen nun für das oben erwähnte Beispiel von drei Unbekannten x, y, z nebst $n > 3$ zugehörigen Gleichungen $a_i x + b_i y + c_i z - d_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$ diejenigen drei Gleichungen aufgestellt werden, aus denen sich Werte x, y, z ergeben, die der soeben ausgesprochenen Forderung genügen.

Die Summe der Fehlerquadrate ist $Q = \sum_1^n i (a_i x + b_i y + c_i z - d_i)^2$,

und dieser Ausdruck soll ein Minimum werden. Man erhält

---

1) R. Dedekind hat in der „Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen", Berlin 1901, S. 45—59 einen Teil des Inhalts einer Gaußschen Vorlesung über Zweck und elementare Begründung der Methode der kleinsten Quadrate veröffentlicht, die er selbst im Wintersemester 1850/51 bei Gauß gehört hatte.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x} = Q_1 = \sum_1^n a_i(a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial y} = Q_2 = \sum_1^n b_i(a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial z} = Q_3 = \sum_1^n c_i(a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0.$$

Bei Benutzung der in der „Ausgleichungsrechnung" üblichen abkürzenden Bezeichnungen

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = [aa], \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = [ab], \text{ usw.}$$

lassen sich vorstehende drei Gleichungen in der Form schreiben:

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z - [ad] = 0,$$
$$[ab]x + [bb]y + [bc]z - [bd] = 0,$$
$$[ac]x + [bc]y + [cc]z - [cd] = 0.$$

Sie werden als die *Normalgleichungen* bezeichnet. Jetzt hat man gerade so viel Gleichungen wie Unbekannte und erhält durch Auflösung dieser Gleichungen im allgemeinen ein einziges und damit das gewünschte System von Lösungen x, y, z. Bei einer größeren Anzahl von Unbekannten ist das Verfahren analog.

Der auf S. 132 mit H bezeichnete Ausdruck wird gleich

$$2(a_1 h_1 + b_1 h_2 + c_1 h_3)^2 + 2(a_2 h_1 + b_2 h_2 + c_2 h_3)^2 + \cdots + 2(a_n h_1 + b_n h_2 + c_n h_3)^2,$$

stellt also eine positive definite Form dar, Q wird somit wirklich ein Minimum.

19. Man wende die vorstehenden Betrachtungen an auf die Lösung der Aufgabe: Um die von einem festen Standpunkt O aus nach vier Punkten (Zielen) A, B, C, D sich erstreckenden Richtungen festzulegen, hat man die Winkel AOB, AOC, AOD, BOC, BOD (Fig. 64) durch Messung bzw. gleich $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ gefunden. Es sollen nun die wahrscheinlichsten Größen x, y, z der Winkel AOB, AOC, AOD entsprechend der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

Fig. 64.

Hier hat man für die drei Unbekannten x, y, z die fünf Gleichungen

$$x = \alpha_1, \quad y = \alpha_2, \quad z = \alpha_3, \quad y - x = \alpha_4, \quad z - x = \alpha_5.$$

Ferner wird $[aa] = 3$, $[bb] = 2$, $[cc] = 2$, $[ab] = -1$, $[ac] = -1$, $[bc] = 0$,

$$[ad] = \alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_5, \quad [bd] = \alpha_2 + \alpha_4, \quad [cd] = \alpha_3 + \alpha_5;$$

daher ergeben sich folgende Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= \alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_5, \\ -x + 2y \quad &= \alpha_2 + \alpha_4, \\ -x \quad + 2z &= \alpha_3 + \alpha_5, \end{aligned}$$

die die Werte liefern:

$$x = \frac{2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5}{4};$$

$$y = \frac{2\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 - \alpha_5}{8},$$

$$z = \frac{2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 - \alpha_4 + 3\alpha_5}{8}.$$

20. Zwischen zwei physikalischen Größen p und q bestehe eine Abhängigkeit von der Form $q = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$. Zur Bestimmung der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 sind n zusammengehörige Wertepaare von p und q beobachtet worden, sie seien $p_i, q_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$. Die Gleichungen aufzustellen, aus denen die wahrscheinlichsten Werte der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 zu berechnen sind.

Die Summe der Fehlerquadrate wird hier

$$\sum_1^n \{q_i - (a_0 p_i^3 + a_1 p_i^2 + a_2 p_i + a_3)\}^2;$$

die Normalgleichungen werden:

$$\begin{aligned} a_0 \sum p^6 + a_1 \sum p^5 + a_2 \sum p^4 + a_3 \sum p^3 &= \sum p^3 q, \\ a_0 \sum p^5 + a_1 \sum p^4 + a_2 \sum p^3 + a_3 \sum p^2 &= \sum p^2 q, \\ a_0 \sum p^4 + a_1 \sum p^3 + a_2 \sum p^2 + a_3 \sum p \ &= \sum pq, \\ a_0 \sum p^3 + a_1 \sum p^2 + a_2 \sum p \ + n a_3 \quad &= \sum q, \end{aligned}$$

wobei $\sum p^m = p_1^m + p_2^m + \cdots + p_n^m$, $\sum p^m q = p_1^m q_1 + p_2^m q_2 + \cdots + p_n^m q_n$ ist.

Diese vier Gleichungen sind also nach den vier Unbekannten a_0, a_1, a_2, a_3 aufzulösen.

III. Funktionen von mehreren Veränderlichen mit Nebenbedingungen.

1. Will man die Werte der n Veränderlichen $x_1, x_2 \cdots x_n$ finden, die mit Rücksicht auf m gegebene Bedingungsgleichungen

$$\varphi_h(x_1, x_2, \cdots x_n) = 0, \ (h = 1, 2, \cdots m, m < n)$$

eine vorgelegte Funktion $z = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ zu einem (relativen) Maximum oder Minimum machen, so bilde man den Ausdruck

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_m \varphi_m$$

und verfahre gerade so, als ob man die Werte der $n + m$ von einander unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ be-

stimmen wolle, die die Funktion F zu einem (absoluten) Maximum oder Minimum machen. Diese Regel gilt aber nicht mehr bei Beantwortung der Frage, ob für ein gefundenes System von Lösungen $x_1, x_2 \cdots x_n$ nun wirklich die Funktion $z = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ ein Maximum oder Minimum wird.[1]) Die Entscheidung hierüber geht übrigens sehr oft schon aus der Natur der Aufgabe hervor. Häufig kommt es auch garnicht darauf an, die Werte der x_i zu finden, die einen extremen Wert von z herbeiführen, sondern es genügt oft, nur die Gleichungen, aus denen die x_i zu berechnen sind, aufzustellen und geometrisch oder mechanisch zu deuten.

2. Liegt übrigens eine Funktion $z = f(x, y)$ von nur zwei Veränderlichen x, y vor, zwischen denen eine Bedingungsgleichung $\varphi(x,y) = 0$ besteht, so wird z ein Maximum oder Minimum, je nachdem bei Einführung der gefundenen Werte x, y der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2$$

negativ oder positiv ist.

Beispiele.

1. Ein Rechtflach soll bei gegebener Oberfläche a^2 ein möglichst großes Volumen haben; wie groß sind seine Kanten zu machen? Vgl. Aufg. 9, S. 137.

Hier wird $F = xyz + \lambda(2xy + 2yz + 2zx - a^2)$, wenn die Kantenlängen mit x, y, z bezeichnet werden. Man findet $x = y = z = \frac{1}{6} a \sqrt{6}$, das Rechtflach muß ein Würfel sein.

2. Eine Strecke von gegebener Länge a soll mit ihren Endpunkten B, C so auf die Schenkel eines Winkels α (Scheitel A) gelegt werden, daß der Inhalt des Dreiecks ABC ein Maximum wird.

Setzt man $AB = x$, $AC = y$, so soll $z = \frac{1}{2} xy \sin\alpha$ ein Maximum werden, wobei $x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha - a^2 = 0$ ist. Das Dreieck muß gleichschenklig sein und zwar findet man $x = y = a : 2 \sin\frac{1}{2}\alpha$; sein Inhalt wird $\frac{1}{4} a^2 \cot\frac{1}{2}\alpha$.

3. Man beweise den Satz von Steiner[2]): „Unter allen Dreiecken mit demselben Winkel C an der Spitze und mit gleichen Grundlinien hat das gleichschenklige sowohl den größten Inhalt als die größte Schenkelsumme".

Ist c die Grundlinie und sind x, y die Gegenwinkel der Seiten a, b, so folgt für den Inhalt: $J = \frac{c^2 \sin x \sin y}{\sin C}$, und hierzu tritt $x + y + C - \pi = 0$. Ferner wird $F = J + \lambda(x + y + C - \pi)$, woraus mit Hilfe

1) Hinsichtlich dieser Frage sei auf O. Stolz „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung", 1. Teil, Leipzig 1893, S. 245 f. verwiesen.

2) Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. 24, S. 192 (1842) = Gesammelte Werke Bd. 2, S. 249.

von $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ sofort $x = y$ folgt. Da auch der für den Eintritt des Maximums zu erfüllenden Forderung genügt wird, liefert das gleichschenklige Dreieck den größten Inhalt. Ebenso leicht ist zu zeigen, daß auch die Schenkelsumme ein Maximum wird.

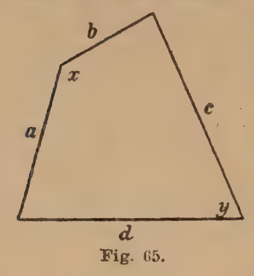


Fig. 65.

Rein geometrisch läßt sich dieser Satz von Steiner sofort beweisen, wenn man beachtet, daß die Scheitel der Winkel C aller Dreiecke der vorerwähnten Beschaffenheit auf einem Kreisbogen liegen, der die gemeinsame Grundlinie zur Sehne hat.

4. Welches unter allen Vierecken, die man aus vier gegebenen Strecken von den Längen a, b, c, d konstruieren kann, hat den größten Flächeninhalt?[1])

Der doppelte Flächeninhalt $2J$ ist, wie Fig. 65 zeigt, gleich $ab \sin x + cd \sin y$, und hierzu tritt die Bedingung

$$\varphi(x, y) \equiv a^2 + b^2 - 2ab \cos x - c^2 - d^2 + 2cd \cos y = 0.$$

Ein Maximum von J liegt vor, falls die Summe der Winkel x und y zwei Rechte beträgt, also das Viereck ein Kreisviereck ist. Für den Winkel x folgt

$$\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)};$$

ferner wird

$$2J = (ab + cd) \sin x =$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)}.$$

5. Aus einem rechteckigen Stück Eisenblech von gegebenem Flächeninhalt a^2 kann man durch Wegschneiden von vier gleich großen Quadraten und Aufbiegen der übrig bleibenden Randstücke einen offenen Kasten herstellen. Wie groß ist die Seite x der vier Quadrate und wie groß sind die anstoßenden Seiten y und z des Rechtecks zu machen, wenn das Volumen V des Kastens möglichst groß werden soll? Vgl. auch Aufg. 9, S. 108.

Zu dem Ausdruck $V = x(y - 2x)(z - 2x)$, der ein Maximum werden soll, tritt $yz - a^2 = 0$. Man findet $y = z = a$, $x = \frac{1}{6}a$, das ursprüngliche Rechteck muß ein Quadrat sein; das größte Volumen wird $\frac{2}{27}a^3$.

6. Ein Fenster hat die Gestalt eines Rechtecks mit darüber befindlichem Halbkreis. Der Umfang der ganzen Figur soll eine vorgeschriebene Länge m haben. Wie groß sind die Breite x und die Höhe y des Rechtecks zu machen, wenn die Menge des durch das

1) Über das Viereck vom kleinsten Inhalt, das aus a, b, c, d konstruiert werden soll, vgl. E. Lampe und R. Sturm im Journal für d. reine u. angew. Math. Bd. 96, S. 78—80 (1884).

Fenster dringenden Lichtes, also der Flächeninhalt des ganzen Fensters ein Maximum werden soll? (Fig. 66.)

Die Funktion $J = xy + \frac{1}{8}x^2\pi$ soll ein Maximum werden mit der Bedingung $x + 2y + \frac{1}{2}x\pi - m = 0$. Man findet $x = 2y$, d. h. die Breite x des Rechtecks muß doppelt so groß sein wie dessen Höhe y, und zwar wird $x = \frac{2m}{4+\pi}$; der maximale Flächeninhalt ist gleich

$$\frac{m^2}{2(4+\pi)} = \frac{mx}{4}.$$

7. Eine unverzweigte elektrische Leitung besteht aus n Teilstrecken von den Längen $l_1, l_2, \cdots l_n$; der Spannungsverlust am Ende der Leitung beträgt E Volt. Wie groß sind die Querschnitte $q_1, q_2 \cdots q_n$ der Leitungsdrähte der Teilstrecken zu wählen, wenn das Gesamtvolumen V des nötigen Leitungsmaterials ein Minimum werden soll und die Stromstärken der einzelnen Teilstrecken gleich $i_1, i_2, \cdots i_n$ sind? Hierbei sei c der spezifische Leitungswiderstand des Materials, wobei angenommen wird, daß die Längen l_i in Metern, die Querschnitte q_i in Quadratmillimetern gegeben sind.[1])

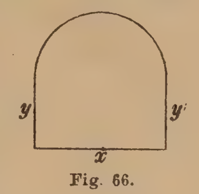


Fig. 66.

Der Ausdruck $V = l_1q_1 + l_2q_2 + \cdots + l_nq_n$ soll ein Minimum werden, und hierzu tritt die Bedingung

$$E = c\left(\frac{l_1 i_1}{q_1} + \frac{l_2 i_2}{q_2} + \cdots + \frac{l_n i_n}{q_n}\right).$$

Man setze $F = V + \lambda E$ und bilde nun die n Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} = l_k - \frac{\lambda c l_k i_k}{q_k^2} = 0, \; k = 1, 2, \cdots n;$$

hieraus folgt

$$q_k = \frac{c}{E}\sqrt{i_k}(l_1\sqrt{i_1} + l_2\sqrt{i_2} + \cdots + l_n\sqrt{i_n}), \; k = 1, 2, \cdots n,$$

d. h. die Querschnitte der Teilstrecken sind den Quadratwurzeln aus den entsprechenden Stromstärken proportional. Das zugehörige Minimum des Volumens V wird $\frac{c}{E}(l_1\sqrt{i_1} + l_2\sqrt{i_2} + \cdots + l_n\sqrt{i_n})^2$.

8. Eine elektrische Leitung von der Länge l_0 verzweigt sich an ihrem einen Ende in n Teilstrecken von den Längen l_k; die diesen Strecken entsprechenden Stromstärken seien i_0 bzw. i_k, $(k = 1, 2, \cdots n)$. Wie groß sind die Querschnitte q_0 bzw. q_k der Drähte zu machen, wenn

1) Für Kupfer z. B. ist der spezifische Leitungswiderstand $c = \frac{1}{57}$, d. h. c ist der Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt. Allgemein ist der Widerstand w eines Drahtes in Ohm gegeben durch $w = cl : q$ (vgl. auch die Fußnote zu S. 112). Zu Telegraphenleitungen nimmt man gewöhnlich Eisendraht von 4 mm Durchmesser, und zwar ist für Eisen $c = 0{,}12$. Der Widerstand einer solchen Leitung von 1 km Länge ist daher $\frac{0{,}12 \cdot 1000}{4\pi} = 9{,}5$ Ohm.

am Ende jeder der n Teilstrecken der Spannungsverlust E Volt betragen und das Gesamtvolumen des Leitungsmaterials ein Minimum sein soll? Der spezifische Leitungswiderstand des Materials sei c.

Die Funktion $V = l_0 q_0 + l_1 q_1 + \cdots + l_n q_n$ soll ein Minimum werden unter den Bedingungen $\varphi_k \equiv c\left(\frac{l_0 i_0}{q_n} + \frac{l_k i_k}{q_k}\right) - E = 0$, $(k = 1, 2 \cdots n)$.

Man hat daher mit Hilfe der Funktion $F \equiv V + \sum_1^n {}^k \lambda_k \varphi_k$ die $n+1$ Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial q_0} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial q_k} = 0$, $(k = 1, 2, \cdots n)$ zu bilden. Es ergibt sich

$$\frac{\partial F}{\partial q_0} = l_0 - \frac{c l_0 i_0}{q_0^2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q_k} = l_k - \frac{c \lambda_k l_k i_k}{q_k^2} = 0.$$

Aus den n Bedingungsgleichungen $\varphi_k = 0$ folgt

$$\frac{l_1 i_1}{q_1} = \frac{l_2 i_2}{q_2} = \cdots = \frac{l_n i_n}{q_n},$$

und wenn diese Quotienten gleich σ gesetzt werden, wird $q_k = \frac{l_k i_k}{\sigma}$. Man findet ferner

$$q_0^2 = \frac{i_0}{\sigma^2}(l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \cdots + l_n^2 i_n)$$

und

$$q_0 = \frac{c}{E}\left\{l_0 i_0 + \sqrt{i_0(l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \cdots + l_n^2 i_n)}\right\},$$

$$q_k = \frac{c l_k i_k}{E}\left\{1 + \frac{l_0 i_0}{\sqrt{i_0(l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \cdots + l_n^2 i_n)}}\right\}, \quad k = 1, 2, \cdots n.$$

Bei Einführung des dem Verzweigungspunkt entsprechenden Spannungsverlustes $E_0 = \frac{c l_0 i_0}{q_0}$ wird $q_k = \frac{c l_k i_k}{E - E_0}$.

9. Unter welchem Einfallswinkel muß ein Lichtstrahl auf einen kugelförmigen Regentropfen fallen, wenn die Ablenkung, die er durch die Brechung beim Eintritt, durch Reflexion und durch Brechung beim Austritt erfährt, ein Minimum sein soll? Wie groß ist der Einfallswinkel, wenn zwischen dem Eintritt und Austritt k Reflexionen stattfinden und die Ablenkung ein Minimum sein soll?

Die Ablenkung z wird bei Brechung in A, einmaliger Reflexion in B (Fig. 67) und Brechung in C gleich $180^0 - \sphericalangle AQC$. Ist ε der Einfallswinkel, β der Brechungswinkel, n der Brechungsindex, so findet man leicht $z = 2\varepsilon - 4\beta + 180^0$ und $\sphericalangle AQC = 4\beta - 2\varepsilon$, wobei $\sin\varepsilon = n \sin\beta$ ist. Würde der Strahl nur in A und B gebrochen, so wäre die Ablenkung gleich dem Winkel $BRQ = 2(\varepsilon - \beta)$; durch die Reflexion in B kommt noch eine weitere, durch den Winkel TSL_1

dargestellte Ablenkung hinzu. Man findet nun $\sphericalangle TSL_1 = \sphericalangle QSR = 180^0 - 2\beta$, daher wird $z = 2(\varepsilon - \beta) + 180^0 - 2\beta = 2\varepsilon - 4\beta + 180^0$. Zugleich ist ersichtlich geworden, daß durch jede weitere Reflexion, die vor dem Austritt des Lichtstrahls aus dem Regentropfen stattfindet, die Ablenkung um $180^0 - 2\beta$ wächst. Im Fall von k Reflexionen

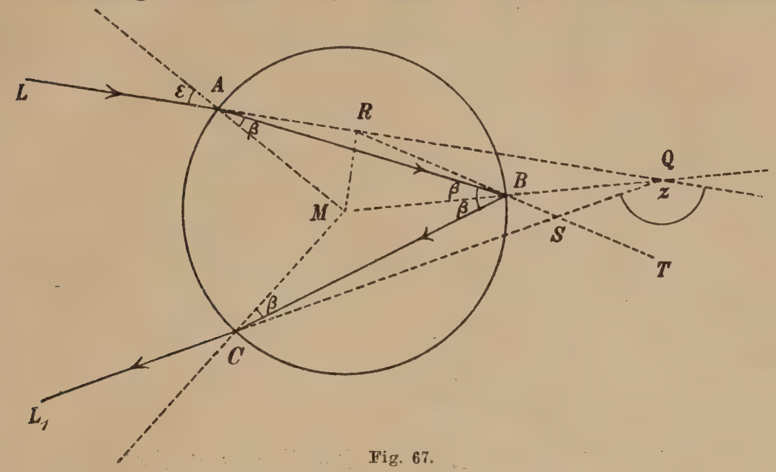


Fig. 67.

wird daher die Ablenkung $z = 2\varepsilon - 2\beta + k(180^0 - 2\beta)$ oder $z = 2\varepsilon - 2(k+1)\beta + k \cdot 180^0$, wobei $\sin\varepsilon = n \sin\beta$ ist.

Man findet, daß das Minimum der Ablenkung eintritt, wenn

$$\sin\varepsilon = \sqrt{\frac{(k+1)^2 - n^2}{(k+1)^2 - 1}} \text{ und } n > 1$$

ist; die Forderung $n > 1$ trifft beim Übergang aus Luft in Wasser zu, denn hier ist für rote Lichtstrahlen $n = 1{,}330$, für violette $n = 1{,}343$. Diesen beiden Lichtarten entsprechend findet man im Fall $k = 1$ die Werte $\varepsilon_r = 59^0\,35'$, $\varepsilon_v = 58^0\,50'$, $\beta_r = 40^0\,25'$, $\beta_v = 39^0\,35'$, wobei sich die Indizes r und v auf die roten bzw. violetten Strahlen beziehen. Bezüglich der Wichtigkeit dieser Betrachtungen in den Fällen $k = 1$ und $k = 2$ für die Erklärung des *Regenbogens* und des Nebenregenbogens sei auf die Lehrbücher der Physik verwiesen, ferner auf eine große Arbeit von Chr. Wiener[1]) und auf eine ausführliche, auch zahlreiche Literaturangaben enthaltende Abhandlung von W. Möbius.[2])

10. Der Umfang u eines Dreiecks, dessen Ecken P_1, P_2, P_3 auf drei festen Kurven k_1, k_2, k_3 liegen, kann nur dann ein Minimum oder

1) „Die Helligkeit des klaren Himmels und die Beleuchtung durch Sonne, Himmel und Rückstrahlung", nach Chr. Wieners Tod hrsgg. von seinen Söhnen H. und O. Wiener, in den Nova acta der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher Bd. 73, Nr. 1, S. 33 ff. (1900).

2) „Zur Theorie des Regenbogens und ihrer experimentellen Prüfung", Abh. der math.-phys. Klasse der kgl. sächs. Ges. d. Wissensch., Bd. 30 (1907), S. 107 bis 256.

Maximum sein, wenn die in den Ecken gezogenen Kurvennormalen die ihnen zugehörigen Dreieckswinkel halbieren und sich also in einem Punkt treffen, oder, anders ausgedrückt, wenn die Kurvennormale einer jeden Ecke sich mit den Kurventangenten der beiden anderen Ecken in einem und demselben Punkt schneidet.[1])

Sind x_i, y_i die Koordinaten der Ecke $P_i (i = 1, 2, 3)$, $f_i(x, y) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ die Gleichungen der drei Kurven, so soll die Funktion

$$u = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ein Maximum oder Minimum werden unter Erfüllung der Bedingungen

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \; f_2(x_2, y_2) = 0, \; f_3(x_3, y_3) = 0.$$

Die geometrische Deutung eines Paares von Gleichungen wie $F'(x_i) = 0$, $F'(y_i) = 0$, wo $F \equiv u + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ ist, ergibt leicht den obigen Satz. Natürlich können auch zwei der gegebenen Kurven oder sogar alle drei in eine einzige zusammenfallen. Ferner können die Kurven insbesondere Geraden sein; dann bilden sie ein Dreieck ABC und es fragt sich nun, welches von allen Dreiecken, die man ABC einschreiben kann, den kleinsten Umfang hat. Da bekanntlich die Höhen eines Dreiecks ABC die Winkel der Verbindungslinien ihrer Fußpunkte DEF halbieren (beim stumpfwinkligen Dreieck einen Winkel und zwei Nebenwinkel), so liefert DEF die Lösung.[2]) Der Höhenschnittpunkt von ABC ist Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises von DEF (oder eines angeschriebenen Kreises, falls das Dreieck ABC stumpfwinklig ist).

11. Der Flächeninhalt eines Vielecks von n Seiten, dessen Ecken auf n gegebenen Kurven liegen, kann nur dann ein Maximum oder Minimum sein, wenn die in jeder Ecke P_i des Vielecks an die zugehörige Kurve gezogene Tangente zu der Diagonale parallel ist, die die beiden benachbarten Ecken P_{i-1} und P_{i+1} verbindet.[3])

Bei analoger Bezeichnungsweise wie in der vorhergehenden Aufgabe ist der doppelte Inhalt des Vielecks gegeben durch

---

1) Vgl. L. J. Magnus „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie", Berlin 1833, S. 370 ff., ferner J. Steiner, Journ. für die reine und angew. Math. Bd. 24 (1842) S. 151 f. = Journ. de mathématiques Bd. 6 (1841), S. 169 = Gesammelte Werke Bd. 2, S. 241.

2) Dieses Ergebnis findet sich ebenso wie der dabei benutzte Hilfssatz über die Verbindungslinien der Höhenfußpunkte eines Dreiecks wohl zuerst bei J. F. Fagnano, Nova acta eruditorum anni 1775, Leipzig 1779, S. 296—300. Einen eigenartigen Beweis der Minimumeigenschaft des Dreiecks DEF hat auch H. A. Schwarz gegeben (Ges. Abh. Bd. 2, S. 344 f.). In Steiners Ges. Werken Bd. 2, S. 728 f. wird dieser Schwarzsche Beweis irrtümlich Steiner zugeschrieben.

3) Vgl. Magnus a. a. O. S. 373 f., sowie Steiner im Journal für die reine u. angew. Mathematik Bd. 24 (1842), S. 152 = Journ. de mathématiques Bd. 6 (1841), S. 169 f. = Gesammelte Werke Bd. 2, S. 241 f.

$$2J = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + \cdots + x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1} + x_n y_1 - x_1 y_n,$$

wobei $f_i(x_i, y_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ ist. Die geometrische Deutung eines Paares von Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \quad \text{wo} \quad F \equiv 2J + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n,$$

ergibt den zu beweisenden Satz. Natürlich können mehrere der gegebenen Kurven oder auch alle in eine einzige zusammenfallen.

Werden die Kurven im Fall $n = 3$ durch Geraden ersetzt, so könnte man vermuten, daß unter allen einem gegebenen Dreieck eingeschriebenen Dreiecken das parallel eingeschriebene ein Maximum oder Minimum des Inhalts habe. Dies trifft jedoch nicht zu, denn man kann sofort unzählige eingeschriebene Dreiecke von größerem oder gleichem oder kleinerem Inhalt angeben. Dem parallel eingeschriebenen kommt ein Maximum des Inhalts erst zu, wenn man die Frage z. B. folgendermaßen faßt: Einen Punkt P im Innern eines Dreiecks anzugeben, so daß die Fußpunkte der von ihm auf die Seiten gefällten Lote ein Dreieck von möglichst großem Inhalt bestimmen. Man findet, daß P der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist, die Fußpunkte der Lote bestimmen als Mitten der Dreiecksseiten das parallel eingeschriebene Dreieck.

Daß dem parallel eingeschriebenen Dreieck *allgemein* kein extremer Wert des Inhalts zugehört, findet analytisch folgendermaßen Ausdruck: Werden mit Hilfe der Gleichungen für die Seiten des vorgelegten Dreiecks drei der sechs Unbekannten, z. B. y_1, y_2, y_3, aus dem Ausdruck für den doppelten Dreiecksinhalt $2J$ eliminiert, so ist dieser nur noch eine Funktion der drei übrigen, nun voneinander unabhängigen Unbekannten x_1, x_2, x_3. Wendet man auf ihn die S. 132 unter Nr. 2 gegebene Regel an, so wird der daselbst mit H bezeichnete Ausdruck keine definite Form; somit liegt weder ein Maximum noch ein Minimum vor.

12. Die Summe der Quadrate der Seiten eines Dreiecks, dessen Ecken auf drei gegebenen Kurven liegen sollen, kann nur dann ein Maximum oder Minimum sein, wenn die in jeder Ecke gezogene Kurvennormale die Gegenseite des Dreiecks halbiert, also durch dessen Schwerpunkt geht.[1])

Lösung ähnlich wie bei den zwei vorhergehenden Aufgaben.

IV. Grenzmaxima und Grenzminima.

Sind bei einer Funktion $y = f(x)$ die Werte der unabhängigen Veränderlichen x aus irgend einem Grund auf ein gewisses Intervall

1) Vgl. Magnus a. a. O. S. 372f.

$a \leqq x \leqq b$ beschränkt, so kann die Funktion an den Grenzen a und b dieses Intervalles sogenannte *Grenzmaxima* oder *Grenzminima* besitzen. Für solche Stellen muß die Ableitung $f'(x)$ keineswegs verschwinden, vielmehr befindet sich ein Grenzmaximum oder Grenzminimum an der Stelle $x = a$, je nachdem $f'(a)$ negativ oder positiv ist, an der Stelle $x = b$, je nachdem $f'(b)$ positiv oder negativ ist.[1])

1. Man bestimme die Maxima und Minima der Funktion

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}x\right),$$

bei der die Veränderliche x aus irgend einem Grund auf das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ beschränkt sei.

$x = \frac{2}{3}$ liefert das Max. $y = 1$, $x = 0$ liefert das Grenzminimum $y = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $x = 1$ das Grenzminimum $y = +\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

2. Den kleinsten oder größten Abstand des auf dem positiven Teil der x-Achse gelegenen Punktes A $(x = a)$ von den Punkten des Kreises $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ zu bestimmen.

Statt des Abstandes kann auch gerade so gut das Quadrat des des Abstandes eingeführt werden. Ist P irgend ein Punkt des Kreises, so wird $PA^2 = z = (x-a)^2 + y^2 = r^2 + a^2 - 2ax$ und $\frac{dz}{dx} = -2a < 0$. Nun kommt aber bei x nur das Intervall $-r \leqq x \leqq +r$ in Betracht, daher ergibt $x = -r$ für das Quadrat des Abstandes das Grenzmaximum $z = (r+a)^2$, $x = +r$ das Grenzminimum $z = (r-a)^2$.

3. Man bestimme die größte und kleinste Sehne, die man aus dem einen Endpunkt der kleinen Achse einer Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, wo $b < a$ sei, ziehen kann.

Wählt man den Endpunkt $x = 0$, $y = -b$ der kleinen Achse, so ergibt sich für das Quadrat der Sehnenlänge der Ausdruck

$$s^2 = \frac{a^2(b^2 - y^2)}{b^2} + (y+b)^2.$$

Aus $\frac{ds^2}{dy} = 0$ folgt $y = \frac{b^3}{c^2}$, wobei y an das Intervall von $-b$ bis $+b$ gebunden und c^2 für $a^2 - b^2$ gesetzt ist. Mit Rücksicht auf das angegebene Intervall muß die Ungleichung $a^2 \geqq 2b^2$ erfüllt sein, falls ein eigentlicher extremer Wert soll auftreten können. Dieser ist ein Maximum $s = \frac{a^2}{c}$ und zwar entspricht er den nach den Punkten

1) Liouville scheint zuerst hierauf hingewiesen zu haben. Vgl. Journ. de mathématiques Bd. 7 (1842), S. 163; vgl. ferner J. A. Serret, „Cours de calcul différentiel et intégral", Paris 1868, S. 212f., in der deutschen Bearbeitung, 6. und 7. Aufl. von G. Scheffers, Leipzig und Berlin 1915, S. 250 f. und 281; O. Stolz, „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung", 1. Teil, Leipzig 1893, S. 208 f.

$x = \pm \frac{a^2}{c^2} \sqrt{a^2 - 2b^2}$, $y = \frac{b^3}{c^2}$ gezogenen Sehnen. Die Wertepaare $y = -b$, $x = 0$ und $y = +b$, $x = 0$ liefern Grenzminima $s = 0$ bzw. $s = 2b$. Im Fall $a^2 < 2b^2$ liefert $y = -b$, $x = 0$ ein Grenzminimum $s = 0$, hingegen $y = +b$, $x = 0$ ein Grenzmaximum $s = 2b$.[1])

§ 18.

Berührung höherer Ordnung zwischen Kurven. Krümmungskreis und Evolute.

1. Soll die Kurve $f(x, y) = 0$ mit einer durch die Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegebenen Kurve an der Stelle t eine k-punktige Berührung (Berührung $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung) eingehen, so muß t die k Gleichungen erfüllen:

$$F(t) = 0, \quad F'(t) = 0, \quad F''(t) = 0, \quad \ldots \quad F^{(k-1)}(t) = 0,$$

wo $F(t) \equiv f(\varphi(t), \psi(t))$ ist.

Sollen die Kurven $f(x, y) = 0$ und $g(x, y) = 0$ an einer Stelle x, y eine k-punktige Berührung eingehen, so müssen die für diese Stelle bei $f(x, y) = 0$ gebildeten $k - 1$ ersten Ableitungen $\frac{d^h y}{d x^h}$, $h = 1, 2, \ldots, (k-1)$, gleich den bei $g(x, y) = 0$ gebildeten Ableitungen sein. Auf den Fall einer zweipunktigen Berührung ist schon in Regel Nr. 2, S. 59, hingewiesen worden.

Die k-punktige Berührung zweier Kurven ist mit Schneiden verbunden oder erfolgt ohne Schneiden, je nachdem k eine ungerade oder gerade Zahl ist.

2. Für die Koordinaten ξ, η des Mittelpunktes (Krümmungsmittelpunktes) und die Länge ϱ des Radius des die Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ an der Stelle t dreipunktig berührenden Kreises, des sogenannten *Krümmungs-* oder *Oskulationskreises*, gelten die Formeln:

$$(1) \qquad \xi = \varphi - \psi' \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}, \quad \eta = \psi + \varphi' \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''},$$

$$\text{Krümmungsradius} \quad \varrho = \frac{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}.$$

Ist die Kurve durch eine Gleichung $y = f(x)$ gegeben, so wird

$$(2) \qquad \xi = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

---

1) Dieses instruktive Beispiel hat E. Lampe gegeben. Vgl. Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft im Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bd. 8 (1905), S. 69.

Ist die Kurve durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben, so wird

$$(3) \quad \xi = x - f_1 \frac{(f_1^2 + f_2^2)}{H}, \quad \eta = y - f_2 \frac{(f_1^2 + f_2^2)}{H}, \quad \varrho = \frac{(f_1^2 + f_2^2)^{\frac{3}{2}}}{H},$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$H = f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2.$$

Ist endlich die Kurve durch eine Gleichung in Polarkoordinaten $r = f(\vartheta)$ gegeben, so wird

$$(4) \quad \xi = \frac{r(r'^2 - rr'')\cos\vartheta - (r^2 + r'^2) r' \sin\vartheta}{r^2 + 2r'^2 - rr''}, \quad \eta = \frac{r(r'^2 - rr'')\sin\vartheta + (r^2 + r'^2) r' \cos\vartheta}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

3. Der reziproke Wert $\frac{1}{\varrho}$ des Krümmungsradius gibt ein Maß für die Krümmung der Kurve an der ihm zugehörigen Stelle. Mit Hilfe der Winkel τ und τ_1, die die in den Endpunkten eines Kurvenbogens von der Länge s gezogenen Tangenten mit der positiven Richtung der x-Achse bilden, kann man die Krümmung der Kurve an einer bestimmten Stelle auch als den Grenzwert definieren, dem sich der Quotient $\frac{\tau - \tau_1}{s}$ nähert, wenn s unendlich klein, gleich ds wird und τ_1 nur um das Differential $d\tau$ von τ verschieden ist. Es ist geradezu $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds}$, wo der „Kontingenzwinkel" $d\tau$ und das Bogenelement ds durch $d\tau = d \operatorname{arc\,tg} \frac{dy}{dx}$ und $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ bestimmt sind.

4. Solche Stellen der Kurve, mit denen der Krümmungskreis eine mindestens vierpunktige Berührung eingeht, heißen *Scheitel* der Kurve.

5. Ist die Kurve durch eine Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben, so verläuft der vom Kurvenpunkt P nach dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkt C gezogene Krümmungsradius in einer Richtung, die zu der im Sinn der wachsenden t gezogenen Tangente von P so gelegen ist wie die positive y-Achse zur positiven x-Achse oder umgekehrt, je nachdem $\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''$ positiv oder negativ ist.

Ist die Kurve durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben, so erstreckt sich der in gleicher Richtung wie soeben (von P nach C) gezogene Krümmungsradius in das positive oder negative Gebiet der Ebene (vgl. zu dieser Bezeichnungsweise Nr. 2, S. 44), je nachdem H negativ oder positiv ist[1]).

---

1) Diese unter Nr. 5 gegebenen Kriterien teilte mir Herr Gundelfinger vor einer längeren Reihe von Jahren mit.

6. Die Ausdrücke für ξ und η in (1) (Nr. 2, S. 153) bilden als Funktionen von t die Parameterdarstellung des zur Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gehörigen Ortes sämtlicher Krümmungsmittelpunkte, der sogenannten *Evolute* der gegebenen Kurve, die ihrerseits eine Evolvente dieser Evolute genannt wird.

Die Länge eines Evolutenbogens ist so groß wie der absolute Wert der Differenz $\varrho_1 - \varrho_2$ der Krümmungsradien der den Endpunkten C_1, C_2 des Evolutenbogens entsprechenden Punkte P_1, P_2 der Evolvente. Voraussetzung ist hierbei, daß der entsprechende Evolventenbogen keinen Scheitel und keinen Wendepunkt enthält. Wird ein biegsamer, aber nicht dehnbarer Faden an die Evolute angelegt und nun von irgend einer Stelle P aus bei fortwährender Spannung abgewickelt, so beschreibt der Punkt des Fadens, der sich ursprünglich in P befand, die Evolvente. Da P auf einer Tangente der Evolute beliebig gewählt werden kann, gehören zu einer Evolute unendlich viele Evolventen; aber jede Kurve (Evolvente) hat nur eine Evolute.

Beispiele.

1. Die Gleichung der Parabel aufzustellen, die die gemeine Zykloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

im Scheitel $t = \pi$ vierpunktig berührt.

Man erhält $(x - a\pi)^2 - 8a(2a - y) = 0$.

2. Zu zeigen, daß die Parabel $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ den Kreis $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0$ an der Stelle $x = y = 1$ vierpunktig berührt.

Die Parabel ist durch die Parameterdarstellung $x = (2 - t)^2$, $y = t^2$ gegeben; zu $x = y = 1$ gehört $t = 1$. Hier wird

$$F(t) = (2 - t)^4 + t^4 - 6(2 - t)^2 - 6t^2 + 10;$$

für $t = 1$ verschwinden $F(t)$, $F'(t)$, $F''(t)$ und $F'''(t)$. Es werde noch bemerkt, daß die gegebene Parabel in rationaler Gestalt die Gleichung $(x - y)^2 - 8(x + y - 2) = 0$ hat. Ihre Scheiteltangente ist durch $x + y - 2 = 0$, ihre Achse durch $x - y = 0$ gegeben; sie berührt die Koordinatenachsen in den Punkten $x = 4$ bzw. $y = 4$.

3. Wie lauten die Gleichungen der Parabeln, die die Ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ in den Scheiteln $t = \frac{1}{2}\pi$ bzw. $t = 0$ vierpunktig berühren?

Im Fall $t = \frac{1}{2}\pi$ erhält man $bx^2 - 2a^2(b - y) = 0$; zum Punkt $t = 0$ gehört die Parabel $ay^2 - 2b^2(a - x) = 0$.

4. Die analoge Aufgabe für den Punkt $t = \frac{1}{4}\pi$, der aus dem ersten Quadranten der Ellipse durch die eine Diagonale des der Ellipse umschriebenen Rechtecks der Scheiteltangenten ausgeschnitten wird.

Man erhält

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2ab\,xy + 2ab\sqrt{2}(bx + ay) - 4a^2b^2 = 0.$$

5. Wie lautet die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel, die die Ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ im Punkt $t = \frac{1}{4}\pi$ vierpunktig berührt?

Hier ist auszugehen von der allgemeinen Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel $a_{11}(x^2 - y^2) + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 1 = 0$. Man erhält

$$xy - b\sqrt{2}\,x - a\sqrt{2}\,y + \tfrac{3}{2}ab = 0$$

oder, in anderer Form, $(x - a\sqrt{2})(y - b\sqrt{2}) - \frac{1}{2}ab = 0$, eine Kurve, deren Asymptoten $x - a\sqrt{2} = 0$ und $y - b\sqrt{2} = 0$ sehr leicht zu konstruieren sind.

6. Für einen beliebigen Punkt der Ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ berechne man die Elemente des Krümmungskreises.

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t, \quad \varrho = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

7. Wie aus der vorstehenden Formel für ϱ im Fall einer Ellipse folgt, gehören zu den Scheiteln $A(t = 0)$ und $B(t = \frac{1}{2}\pi)$ der Achse $2a$ bzw. $2b$ die Krümmungsradien $\varrho_A = \frac{b^2}{a}$ bzw. $\varrho_B = \frac{a^2}{b}$. Man zeige, daß die Krümmungsmittelpunkte dieser Scheitel folgendermaßen konstruiert werden: Von der im ersten Quadranten gelegenen Ecke E des der Ellipse umschriebenen Rechtecks der Scheiteltangenten fällt man ein Lot auf die nicht durch E gehende Diagonale dieses Rechtecks (Fig. 68); dieses Lot trifft die Achsen in den gesuchten Krümmungsmittelpunkten C_1 bzw. C_2.

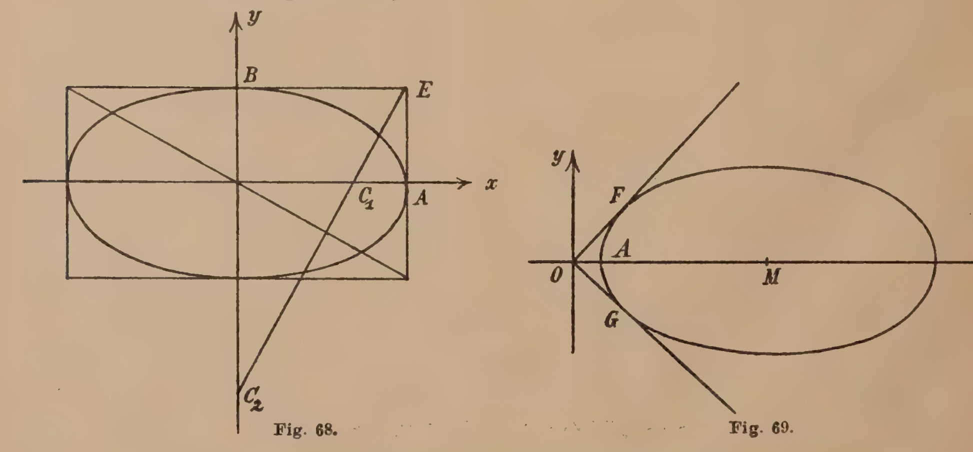


Fig. 68. Fig. 69.

8. Zwei geradlinig verlaufende Strecken (Mittellinien zweier Landstraßen), deren Verlängerungen sich rechtwinklig schneiden, sollen durch einen Ellipsenbogen so verbunden werden, daß die Strecken

tangential in diesen Bogen übergehen und der kleinste bei der Ellipse vorkommende Krümmungsradius gleich 225 m ist. Auch soll der Bogen die Halbierungslinie des rechten Winkels zur Symmetrielinie haben (Fig. 69) und sein Scheitel A vom Scheitel O des rechten Winkels 100 m entfernt sein. Wo liegt der Mittelpunkt der Ellipse und wie groß sind ihre Halbachsen?

Man wählt die beiden sich rechtwinklig schneidenden Geraden als Halbierungslinien der Quadranten des Koordinatensystems, die oben genannte Symmetrielinie als x-Achse; alsdann ist

$$\frac{(x-k)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

die Gleichung der Ellipse, k die Abszisse ihres Mittelpunktes M. Sollen die Geraden $y = x$ und $y = -x$ Tangenten der Kurve sein, so muß die in x quadratische Gleichung $\frac{(x-k)^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} - 1 = 0$ zwei gleiche Wurzeln haben, was für $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ eintritt. Der kleinste Krümmungsradius der Ellipse ist $\frac{b^2}{a}$, wenn $b < a$ angenommen wird (vgl. die vorhergehende Aufgabe). Im vorliegenden Fall ist $\frac{b^2}{a} = 225$; da ferner $OA = 100$ m sein soll, wird $OM = \sqrt{a^2 + b^2} = 100 + a$. Aus diesen Gleichungen folgt $a = 400$ m, $b = 300$ m, $k = 500$ m. Der Übergang der Ellipse in die beiden Geraden findet an den Stellen F und G statt, die die Koordinaten $x = 180$ m, $y = \pm 180$ m haben.

9. Mit Hilfe des Ergebnisses von Aufg. 6 bestimme man die Elemente des Krümmungskreises für jene Punkte, die aus der Ellipse durch die Diagonalen des ihr umschriebenen Rechtecks der Scheiteltangenten ausgeschnitten werden; auch suche man eine Konstruktion des Krümmungskreises. Man kann sich hierbei natürlich auf den im ersten Quadranten gelegenen Ellipsenpunkt P beschränken.

Für den Punkt P ist $t = \frac{1}{4}\pi$; ferner werden die Elemente seines Krümmungskreises:

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{4a}\sqrt{2}, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{4b}\sqrt{2}, \quad \varrho = \frac{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{4ab}\sqrt{2}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt C liegt offenbar auf der Geraden $ax + by = 0$, die im Mittelpunkt der Ellipse auf der durch P gehenden Diagonale des oben genannten Rechtecks senkrecht steht und die Normale von P im Krümmungsmittelpunkt C trifft.

10. Die gleiche Aufgabe für jene Punkte der Ellipse, für die das zwischen den Achsen gelegene Stück der Tangente ein Minimum und zwar gleich $a + b$ ist; sie haben (vgl. Aufg. 32, S. 123) die Koordinaten:

$$x = \pm \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \quad y = \pm \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}.$$

Man beschränke sich auch hier auf den im ersten Quadranten gelegenen Ellipsenpunkt P und beachte, daß er das eben genannte Tangentenstück in Teile von der Länge a bzw. b teilt (Fig. 53, S. 124). Für ihn ist

$$\cos t = +\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \quad \sin t = +\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}, \quad \xi = +\frac{(a-b)\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},$$

$$\eta = -\frac{(a-b)\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}, \quad \varrho = \sqrt{ab}.$$

Der Ausdruck für ϱ zeigt, daß der Krümmungsmittelpunkt C aus der Normale von P durch den Halbkreis ausgeschnitten wird, den man über dem oben erwähnten Tangentenabschnitt beschreiben kann.

11. Der Krümmungsradius ϱ eines beliebigen Punktes P einer Ellipse mit den Halbachsen a und b hat die Länge $\varrho = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, wo r_1, r_2 die Längen der Brennstrahlen von P bedeuten.

Bei Einführung der linearen Exzentrizität $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ wird ϱ nach Aufg. 6, S. 156 gleich $\frac{(a^2 - c^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$ und bei Einführung der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = c : a$ und der Koordinaten von P folgt

$$\varrho = \frac{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{\{(a + \varepsilon x)(a - \varepsilon x)\}^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

da $r_1 = a + \varepsilon x$ und $r_2 = a - \varepsilon x$ die Längen der beiden Brennstrahlen darstellen.

12. Für einen beliebigen Punkt der Kurve

$$x = f(t)\cos t - f'(t)\sin t, \quad y = f(t)\sin t + f'(t)\cos t$$

die Länge des Krümmungsradius zu berechnen. Vgl. auch Aufgabe 13, S. 175, und Aufg. 17, S. 176.

$$\varrho = f(t) + f''(t).$$

13. Die Elemente des Krümmungskreises für den Punkt $x = 3$, $y = 1$ der Kurve $y = x^2 - 6x + 10$ zu bestimmen.

$$\xi = 3, \quad \eta = 1\tfrac{1}{2}, \quad \varrho = \tfrac{1}{2}.$$

Man überzeuge sich übrigens, ob der Punkt wirklich auf der Kurve liegt.

14. Die gleiche Aufgabe für den Punkt $x = 1$, $y = 0$ der Kurve $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. (Fig. 70.)

Fig. 70.

$$\xi = 2\tfrac{2}{3}, \quad \eta = -\tfrac{5}{6}, \quad \varrho = \tfrac{5}{6}\sqrt{5} = 1{,}86.$$

15. Ebenso für den Punkt $x = 1$, $y = 3$ der Kurve $4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 = 0$.

$$\xi = 2\tfrac{1}{3}, \quad \eta = 3, \quad \varrho = 1\tfrac{1}{3}.$$

16. Wie lautet die Gleichung des Krümmungskreises für den Punkt $x = 0$, $y = 1$ der Kurve $y = e^x$?

Da $\xi = -2$, $\eta = 3$, $\varrho = 2\sqrt{2}$ gefunden wird, lautet die gesuchte Gleichung

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 - 8 = 0.$$

17. Die Elemente des Krümmungskreises der Kurve $y = \sin x$ zu bestimmen und zwar für einen beliebigen Punkt, für den Scheitel $x = \frac{1}{2}\pi$, sowie für die Punkte $x = \frac{1}{4}\pi$ und $x = \frac{1}{6}\pi$.

Man findet:

Für einen beliebigen Punkt:

$$\xi = x + \cot x(1 + \cos^2 x), \quad \eta = -\frac{2\cos^2 x}{\sin x}, \quad \varrho = \frac{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}{\sin x},$$

für den Scheitel $x = \frac{1}{2}\pi$:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \eta = 0, \quad \varrho = 1,$$

für $x = \frac{1}{4}\pi$:

$$\xi = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} = 2{,}2854, \quad \varrho = \frac{3}{2}\sqrt{3} = 2{,}598,$$

für $x = \frac{1}{6}\pi$:

$$\xi = \frac{2\pi + 21\sqrt{3}}{12} = 3{,}555, \quad \eta = -3, \quad \varrho = \frac{7}{4}\sqrt{7} = 4{,}63.$$

18. Welche Länge hat der Krümmungsradius eines beliebigen Punktes der Kurve $y = a \ln \cos \frac{x}{a}$?

$$\varrho = a : \cos \frac{x}{a}.$$

19. In welchem Punkt ist die Kurve $y = \ln x$ am stärksten gekrümmt?

Der Krümmungsradius ϱ soll ein Min. werden. Für einen beliebigen Punkt der Kurve $y = \ln x$ ist $\varrho = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$, ferner $\frac{d\varrho}{dx} = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{x^2}$, und dieser Ausdruck verschwindet für $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$, wobei im vorliegenden Fall nur $+\frac{1}{2}\sqrt{2}$ in Betracht kommt. Da man für $\frac{d^2\varrho}{dx^2}$ einen positiven Wert findet, hat die Kurve $y = \ln x$ den kleinsten Krümmungsradius im Punkt $x = +\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y = -\frac{1}{2}\ln 2$, und zwar wird $\varrho = \frac{3}{2}\sqrt{3} = 2{,}598$.

20. Wie lautet die Gleichung des dem Punkt $x = y = a$ der Zissoide $(x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0$ zugehörigen Krümmungskreises? Vgl. Fig. 22, S. 63.

Da $\xi = -\frac{7}{3}a$, $\eta = \frac{8}{3}a$, $\varrho = \frac{5}{3}a\sqrt{5}$ gefunden wird, lautet die gesuchte Gleichung $3(x^2 + y^2) + 14ax + 16ay - 4a^2 = 0$.

21. Bei der gleichseitigen Hyperbel $xy - c^2 = 0$ ist der einem beliebigen Punkt P der Kurve zugehörige Krümmungsradius gleich $r^3 : (2c^2)$, wo r den Abstand des Punktes P vom Mittelpunkt der Kurve bezeichnet.

Nach einer der Gleichungen (3), S. 154, ist $\varrho = \frac{(f_1{}^2 + f_2{}^2)^{\frac{3}{2}}}{H}$, wo $H = f_{11}f_2{}^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1{}^2$. Nun wird $f_1{}^2 + f_2{}^2 = y^2 + x^2 = r^2$, $H = -2c^2$, daher, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, $\varrho = \frac{r^3}{2c^2}$.

22. Man zeige, daß bei der Kettenlinie $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = m \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right)$ die Länge des einem Kurvenpunkt P zugehörigen Krümmungsradius ϱ so groß ist wie die Normale N der Kurve. Vgl. Aufg. 12, S. 48.

Man findet nach einer der Gleichungen (2), S. 153, und nach Nr. 2, S. 65, $\varrho = N = \frac{1}{m}y^2$, und zwar leitet man dieses Ergebnis am besten unter Anwendung hyperbolischer Funktionen ab. Um den zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkt zu konstruieren, hat man nur N auf die Normale von P nach der richtigen Seite hin abzutragen; die Konstruktion dieser Normale ist durch Aufg. 12, S. 48, erledigt.

23. Bei Kurven mit der Gleichung $y = cx^n$ gilt für den zu einem Punkt $P(x, y)$ gehörigen Krümmungsradius die Formel

$$\varrho = \frac{nt^2}{(n-1)s \cdot \sin\alpha},$$

und zwar ist hier α der konkave Winkel, den die in P gezogene Tangente der Kurve mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, t ist die absolute Länge dieser Tangente, s die Subtangente $y : y'$ (vgl. S. 65). Man beweise diese Formel und zeige, daß auf Grund derselben der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt C in folgender Weise konstruiert werden kann[1]): Zunächst zeichnet man die Tangente und Normale von P, was sehr leicht geschehen kann, da nach Aufg. 1, S. 66, die Subtangente von P gleich $\frac{1}{n}x$

Fig. 71

1) Vgl. hierzu F. Dingeldey in der Ztschr. für Mathematik und Physik, Bd. 54, S. 89 (1906), wo noch andere Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes der Kurve $y = cx^n$ gegeben werden.

ist. Alsdann fällt man vom Fußpunkt M der zu P gehörigen Ordinate auf die Normale das Lot MQ, verbindet Q mit dem Endpunkt T der Subtangente und zieht durch T rechtwinklig zu TQ die Gerade TD, die die Normale von P in D schneidet (Fig. 71). Alsdann ist $PD = \frac{t^2}{s \cdot \sin \alpha}$. Durch Multiplikation dieses Ausdrucks mit $\frac{n}{n-1}$ erhält man ϱ, wenigstens der Länge nach. Man hat noch darauf zu achten, daß sich der Krümmungsradius von P aus in dasjenige Gebiet der Ebene erstreckt, dem die Kurve in P die konkave Seite zukehrt. Mitunter muß also die in der angegebenen Weise konstruierte Strecke von der Länge ϱ mit Hilfe des Zirkels noch um zwei Rechte gedreht werden.

Zur Ableitung des Ausdrucks für ϱ beachte man, daß $1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{t^2}{s^2}$ ist; mit Hilfe von $s = y : y' = \frac{1}{n} x$ (vgl. Aufg. 1, S. 66) und $y'' = n(n-1) c \cdot x^{n-2}$ folgt $\frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{t^2 n}{(n-1) y} = \pm \frac{nt}{(n-1) \sin \alpha}$, wobei das obere oder untere Vorzeichen zu setzen ist, je nachdem P oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt. Der absolute Wert von $\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ wird offenbar $\left| \frac{nt^2}{(n-1) s \cdot \sin \alpha} \right|$.

Die angegebene Konstruktion von ϱ folgt daraus, daß $PQ = s \cdot \sin \alpha$ ist und die ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke DPT und TPQ die Proportion $PD : PT = PT : PQ$ liefern, aus der sich $PD = \frac{t^2}{s \sin \alpha}$ ergibt.

Man kann leicht zeigen, daß die Formel für den Krümmungsradius und die aus ihr abgeleitete Konstruktion auch bei schiefwinkligen Koordinaten gilt; nur ist alsdann die Subtangente $s = TM$ nicht die rechtwinklige Projektion der Tangente t auf die x-Achse, sondern die in Richtung der y-Achse ausgeführte Projektion auf die x-Achse.

Mit Vorstehendem ist eine Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes bei den sogenannten adiabatischen oder polytropischen Kurven gegeben, die in der mechanischen Wärmetheorie eine wichtige Rolle spielen. Die Gleichung dieser Kurven gibt eine Beziehung zwischen dem Druck p und dem Volumen v eines idealen Gases, dem keine Wärme zugeführt oder entzogen wird. Nach Aufg. 38, S. 35, ist $dQ = \frac{1}{R}(c_v \cdot v \cdot dp + c_p \cdot p \cdot dv)$, wo c_v und c_p die spezifische Wärme bei konstantem Volumen bzw. bei konstantem Druck, R die Gaskonstante bedeutet. Im vorliegenden Fall ist $dQ = 0$, daher $\frac{dp}{p} + \frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{dv}{v} = 0$ oder $\frac{dp}{p} + \varkappa \frac{dv}{v} = 0$, wenn $c_p : c_v = \varkappa$ gesetzt wird. Es ist sofort ersichtlich, daß diese Gleichung durch Differentiation der Gleichung $pv^{\varkappa} =$ konst. erhalten wird, die von der Form $y = cx^n$ ist, wenn man

p durch y, v durch x, $\varkappa$ durch $-n$ ersetzt. Durch $pv^\varkappa = c$ wird die adiabatische oder polytropische Kurve dargestellt. Das aus dem Griechischen stammende Wort adiabatisch bedeutet undurchlässig; die Ausdehnung des Gases vollzieht sich so, als wäre der ganze Apparat, in dem sich das Gas befindet, in einer für die Wärme undurchlässigen Hülle eingeschlossen. Zur Gestalt der Kurven $y = cx^n$ vgl. auch Aufg. 8, S. 188.

24. Man zeige, daß der zu einem beliebigen Punkt P einer Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gehörige Krümmungskreis mit der Kurve an der Stelle t eine mindestens vierpunktige Berührung eingeht, wenn der Radius ϱ dieses Kreises für die Stelle P einen extremen Wert hat.

Sind ξ, η, ϱ die Elemente des Krümmungskreises, so ist jedenfalls nach Nr. 1, S. 153:

$F(t) \equiv (\varphi - \xi)^2 + (\psi - \eta)^2 - \varrho^2 = 0$, ferner $F'(t) = 0$ und $F''(t) = 0$. Soll nun ϱ oder ϱ^2 einen extremen Wert haben, so muß $\frac{d\varrho^2}{dt} = 0$ sein, eine Gleichung, die mit $F'(t) = 0$ identisch ist. Die zweite Ableitung $\frac{d^2\varrho^2}{dt^2}$ wird gleich $F''(t)$, verschwindet also ebenfalls, daher erfordert ein Max. oder Min. von ϱ^2, daß auch $\frac{d^3\varrho^2}{dt^3}$, was mit $F'''(t)$ identisch ist, verschwinde. (Vgl. Nr. 1, S. 107.)

25. Wenn der in den Formeln für die Elemente des Krümmungskreises eines Punktes der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ auftretende Ausdruck $\frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}$ (vgl. Gl. (1) in Nr. 2, S. 153) den Wert Eins hat, bedeutet der Parameter t den Winkel α, den die in irgend einem Kurvenpunkt gezogene Tangente mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, oder es ist t von α nur um eine additive Konstante c verschieden. Auch die Umkehrung gilt: Ist $t = \alpha + c$, so wird $\frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''} = 1$. Diese beiden Sätze sind zu beweisen.

Es ist $\frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi'^2 + \psi'^2} = \frac{d \operatorname{arc\,tg} \frac{\psi'}{\varphi'}}{dt}$, daher im vorliegenden Fall $\frac{d \operatorname{arc\,tg} \frac{\psi'}{\varphi'}}{dt} = 1$ und $\operatorname{arc\,tg} \frac{\psi'}{\varphi'} = t + c$; mit Rücksicht auf $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\psi'}{\varphi'}$ folgt nun $\alpha = t + c$. Die Umkehrung ist richtig, denn aus $\alpha = t + c$ folgt $\frac{d\alpha}{dt} = 1$.

26. Man zeige, daß der reziproke Wert des zu einem Punkt P der Kurve $y = f(x)$ gehörigen Krümmungsradius gleich $y'' \cdot \cos^3 \alpha$ ist, wo α den Winkel bedeutet, den die in P gezogene Kurventangente mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt.

In der Formel $\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ ist $y' = \operatorname{tg} \alpha$, $1 + y'^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. —

Ist die Neigung der Tangente gegen die x-Achse sehr gering, so kann angenähert $\cos\alpha = 1$ und $\frac{1}{\varrho} = y''$ gesetzt werden; dies geschieht z. B. in der Festigkeitslehre bei der Ableitung der Differentialgleichung der sogenannten elastischen Linie, wo der Ausdruck für ϱ benutzt, aber $\cos\alpha$ meist gleich Eins angenommen wird.

27. Zu zeigen, daß die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ eines Kurvenpunktes durch $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\sin\alpha}{dx}$ dargestellt werden kann, wo α die soeben erwähnte Bedeutung hat.

Es ist $\frac{d\sin\alpha}{dx} = \cos\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dx}$, wobei $\alpha = \operatorname{arc\,tg} y'$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$.

28. Bei den Kurven, die in Polarkoordinaten Gleichungen von der Form $r^m = a^m \sin m\vartheta$ haben (den sogenannten Sinusspiralen, vgl. Aufg. 32 und 33, S. 54), soll die Länge des irgend einem Punkt P der Kurve zugehörigen Krümmungsradius ϱ berechnet und außerdem gezeigt werden, daß die Polarnormale (vgl. S. 66) von P $(m+1)$mal so groß wie der Krümmungsradius ist.

Allgemein hat man $\varrho = \frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}$ (nach Gl. (4) in Nr. 2, S. 154); nun ist $r^m = a^m \sin m\vartheta$, $r^{m-1}\cdot r' = a^m\cdot\cos m\vartheta$, $r^{m-1}\cdot r'' + (m-1)r^{m-2}\cdot r'^2 = -ma^m \sin m\vartheta = -mr^m$, daher $rr'' + (m-1)r'^2 = -mr^2$. Der Nenner in dem Ausdruck für ϱ wird somit $r^2+2r'^2 - rr'' = (m+1)(r^2+r'^2)$ und ϱ selbst gleich $\frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{m+1}$. Mit Hilfe von $r^{m-1}\cdot r' = a^m\cos m\vartheta$ findet man $r' = \frac{a^m r\cos m\vartheta}{r^m} = r\cot m\vartheta$ und $r^2+r'^2 = \frac{r^2}{\sin^2 m\vartheta}$, folglich $\varrho = \frac{r}{(m+1)\sin m\vartheta} = \frac{a^m}{(m+1)r^{m-1}}$.

Die Länge N der Polarnormale ist allgemein nach Nr. 4, S. 66, gleich $\sqrt{r^2+r'^2}$; da ϱ gleich $\frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{m+1}$ gefunden wurde, wird $N = (m+1)\varrho$. Die Formeln $\varrho = \frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{m+1} = \frac{a^m}{(m+1)r^{m-1}}$ und $N = (m+1)\varrho$ gelten auch für die Sinusspiralen $r^m = a^m\cos m\vartheta$.

29. Man wende das in Nr. 28 gefundene Ergebnis an auf die Bestimmung der Länge des Krümmungsradius eines beliebigen Punktes der Lemniskate $r^2 = 2a^2\cos 2\vartheta$ (vgl. Fig. 16 und Nr. 33, S. 54), ferner auf die Krümmungsradien der beiden Scheitel ($\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$) und jener Punkte, deren Abstand von der Polarachse ein Maximum ist (zu diesen Punkten vgl. Aufg. 39, S. 125; für sie ist $r = a$).

Man findet für einen beliebigen Punkt der Lemniskate $\varrho = \frac{2a^2}{3r}$. Für die Scheitel $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ wird $\varrho = \frac{1}{3}r = \frac{a}{3}\sqrt{2}$; für die Punkte größten Abstandes von der Polarachse wird $\varrho = \frac{2}{3}a$.

30. Bei den Sinusspiralen $r^m = a^m \sin m\vartheta$ schneidet der einem Kurvenpunkt P zugehörige Krümmungskreis von dem Radiusvektor r des Kurvenpunktes ein Stück s ab, das die Länge $\frac{2r}{m+1}$ hat.[1])

In Aufg. 28 wurde die Gleichung $\varrho = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{m+1}$ bewiesen. Für den Winkel γ des Radiusvektors mit der Tangente von P gilt nun nach Nr. 4, S. 46, die Formel $\operatorname{tg} \gamma = r : r'$; andrerseits ist das vorerwähnte Stück s des Radiusvektors gleich $2\varrho \sin \gamma$ (Fig. 72) und bei Einführung der Werte von ϱ und $\sin \gamma$ wird $s = \frac{2\sqrt{r^2+r'^2}}{m+1} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}$ $= \frac{2r}{m+1}$. Auch für die Sinusspiralen $r^m = a^m \cos m\vartheta$ wird $s = \frac{2r}{m+1}$.

31. Man zeige, daß bei *schiefwinkligen Koordinaten* mit dem Achsenwinkel ω die Koordinaten ξ, η des Mittelpunktes und die Länge ϱ des Radius des Krümmungskreises eines Punktes der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ durch die Formeln gegeben sind:

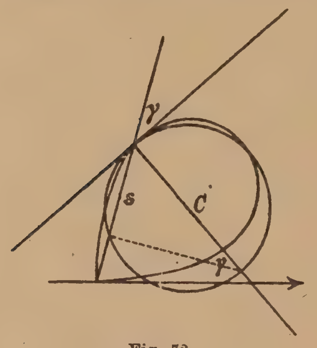


Fig. 72.

$$\xi = \varphi - \sigma(\psi' + \varphi' \cos \omega),$$
$$\eta = \psi + \sigma(\varphi' + \psi' \cos \omega),$$

wobei

$$\sigma = \frac{\varphi'^2 + \psi'^2 + 2\varphi'\psi' \cos \omega}{(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'') \sin^2 \omega},$$

$$\varrho = \frac{(\varphi'^2 + \psi'^2 + 2\varphi'\psi' \cos \omega)^{\frac{3}{2}}}{(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'') \sin \omega}.$$

Da der Krümmungskreis mit der gegebenen Kurve an der Stelle t eine dreipunktige Berührung eingeht, sind nach Nr. 1, S. 153, die Gleichungen zu erfüllen:

$$F(t) \equiv (\varphi - \xi)^2 + (\psi - \eta)^2 + 2(\varphi - \xi)(\psi - \eta) \cos \omega - \varrho^2 = 0,$$
$$F'(t) = 0, \qquad F''(t) = 0.$$

Bei Einführung eines Proportionalitätsfaktors σ läßt sich $F'(t)$ durch $\varphi - \xi = \sigma(\psi' + \varphi' \cos \omega)$, $\psi - \eta = -\sigma(\varphi' + \psi' \cos \omega)$ ersetzen. Dann wird σ durch Substitution dieser Ausdrücke in $F''(t) = 0$ erhalten.

Hat die vorgelegte Kurve die Gleichung $y = f(x)$, so folgt

$$\xi = x - \sigma(y' + \cos \omega), \qquad \eta = y + \sigma(1 + y' \cos \omega),$$

wobei

$$\sigma = \frac{1 + y'^2 + 2y' \cos \omega}{y'' \sin^2 \omega}, \qquad \varrho = \frac{(1 + y'^2 + 2y' \cos \omega)^{\frac{3}{2}}}{y'' \sin \omega}.$$

32. Die Gleichung der Evolute der Parabel $y^2 - px = 0$ abzuleiten.

Die Parabel $y^2 = px$ hat die Parameterdarstellung $x = t^2 : p$, $y = t$; für die Evolute wird $\xi = \frac{6t^2 + p^2}{2p}$, $\eta = -\frac{4t^3}{p^2}$, woraus durch Elimi-

1) Vgl. A. Serret, Journ. de math. Bd. 7 (1842), S. 118.

nation von t die Gleichung $27p\eta^2 - 2(2\xi - p)^3 = 0$ hervorgeht, die eine *Neilsche Parabel* darstellt. Vgl. Fig. 54, S. 125.

33. Man bilde die Gleichung der Evolute der Ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Die Parameterdarstellung der Evolute ist schon in Aufg. 6, S. 156, gegeben worden; durch Elimination von t folgt

$$\left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \text{wo} \quad c^2 = a^2 - b^2. \quad \text{(Fig. 73.)}$$

34. Zu zeigen, daß der einem Ellipsenquadranten zugehörige Bogen der Evolute die Länge $\frac{a^3 - b^3}{ab}$ hat, wenn a und b die Halbachsen der Ellipse bedeuten.

Nach Nr. 6, S. 155 und nach Aufgabe 7, S. 156, ist die Länge dieses Bogens gleich $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}$.

35. Man zeige, daß die Evolute der gemeinen Zykloide eine der Grundkurve kongruente Zykloide darstellt, die aus der Grundkurve durch eine gewisse Verschiebung hervorgeht.

Die Parameterdarstellung der vorgelegten Zykloide ist

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t).$$

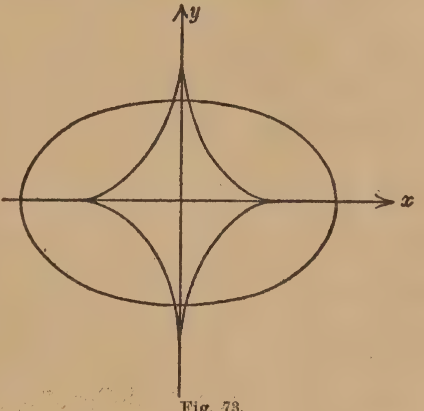


Fig. 73.

Für die Evolute findet man die Parameterdarstellung

$$\xi = a(t + \sin t), \qquad \eta = -a(1 - \cos t).$$

Wird durch $X = \xi - a\pi$, $Y = \eta + 2a$ ein neues Koordinatensystem eingeführt, dessen Achsen zu den Achsen des ursprünglichen Systems parallel sind (vgl. Fig. 74, S. 166), wird ferner statt des Wälzungswinkels t ein anderer $\tau = t - \pi$ eingeführt, so folgt für die Evolute die Parameterdarstellung

$$X = a(\tau - \sin\tau), \qquad Y = a(1 - \cos\tau).$$

36. Es ist zu beweisen, daß der einem einmaligen Abrollen des erzeugenden Kreises zugehörige Bogen der gemeinen Zykloide 8mal so groß wie der Radius dieses Kreises ist.

Die Anwendung eines in Nr. 6, S. 155, angeführten Satzes auf den von $t = \pi$ bis $t = 0$ genommenen halben Zykloidenbogen ergibt, daß der zugehörige Evolutenbogen, der der Grundkurve im vorliegenden Fall nach Aufg. 35 *kongruent* wird, gleich der Differenz $4a - 0$, also gleich $4a$ ist.

37. Bei der gemeinen Zykloide ist der irgend einem Kurvenpunkt

zugehörige Krümmungsradius ϱ doppelt so groß wie die Normale N des Punktes.

Die Länge der Normale ist nach Nr. 2, S. 65, gleich $\frac{\psi}{\varphi'}\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}$; für ϱ findet man im vorliegenden Fall $-2\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}$, daher ist N ohne Rücksicht auf das Vorzeichen gleich $\frac{1}{2}\frac{\psi}{\varphi'}\cdot\varrho$. Nun wird $\psi:\varphi'=1$, somit $\varrho = 2N$.

38. Zu zeigen, daß bei der gemeinen Zykloide der Abstand eines Kurvenpunktes P vom Krümmungsmittelpunkt des zugehörigen Evolutenpunktes konstant und zwar doppelt so groß wie der Durchmesser des die Zykloide durch Rollen erzeugenden Kreises ist.

Der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt P_1 hat, als Punkt der Evolute betrachtet, einen Krümmungsmittelpunkt P_2, dessen Abszisse im Fall der obigen Parameterdarstellung der Zykloide mit der Abszisse von P übereinstimmt, denn die einander folgenden Evoluten sind sämtlich der Grundkurve kongruent (Fig. 74). Da aber $P_1 P_2$ zu der in P gezogenen Tangente der Grundkurve parallel ist, hat der Punkt P_2 auf seiner Kurve dieselbe Lage wie P auf der Grundkurve, liegt also nach Aufg. 35 im Abstand $4a$ senkrecht unter P, d. h. es ist $P_2 P = 4a$. Die Punkte P, P_1, P_2 liegen auf einem Kreis mit dem Durchmesser $P_2 P$. Da PP_1 nach Nr. 37 doppelt so groß wie die Normale PN ist, ergibt sich die Tiefe RP, in der die durch P_1 parallel zu OA gezogene Gerade $P_1 R$ unter P liegt, doppelt so groß wie die Ordinate MP des Punktes P, woraus sofort eine Konstruktion des zu P gehörigen Krümmungsmittelpunktes P_1 ohne Benutzung der Normale oder Tangente von P folgt. Hiermit ist aber auch eine Konstruktion dieser Normale oder Tangente gegeben. Es genügt nämlich dabei die Gerade zu kennen, auf der der erzeugende Kreis der Zykloide abrollt, ferner den Radius dieses Kreises und den Kurvenpunkt P; außerdem muß man noch wissen, ob P auf dem ansteigenden oder absteigenden Teil der Zykloide gelegen ist.

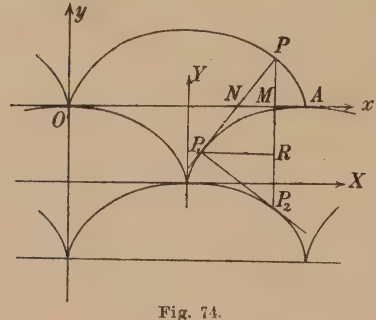


Fig. 74.

39. Zu beweisen, daß eine Epizykloide zur Evolute wieder eine Epizykloide hat.

Für die Grundkurve, die durch einen Punkt eines Kreises vom Radius b erzeugt wird, wenn dieser auf einem festen Kreis vom Radius a rollt, ohne zu gleiten, hat man die Parameterdarstellung:

$$x = (a+b)\cos t + b\cos\frac{a+b}{b}t = \varphi(t),$$

$$y = (a+b)\sin t + b\sin\frac{a+b}{b}t = \psi(t).$$

Bei der in diesem Buch gemachten Annahme über die positive Richtung der x-Achse (wagrecht, nach rechts) liegt hierbei zu Anfang der Bewegung ($t = 0$) der die Kurve beschreibende Punkt an der Stelle $a + 2b$ der x-Achse, rechts vom Mittelpunkt des rollenden Kreises. Mit Hilfe der abkürzenden Bezeichnung $\frac{a+b}{b} = m$ wird

$$x = b(m\cos t + \cos mt) = \varphi(t), \quad y = b(m\sin t + \sin mt) = \psi(t).$$

Man findet $\quad \varphi'^2 + \psi'^2 = 2b^2m^2(1 + \cos(m-1)t)$

$$\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'' = b^2m^2(m+1)(1 + \cos(m-1)t),$$

$$\xi = b_1(m\cos t - \cos mt), \quad \eta = b_1(m\sin t - \sin mt),$$

wo

$$b_1 = \frac{m-1}{m+1}\,b = \frac{ab}{a+2b} \quad \text{ist.}$$

Die Ausdrücke für ξ und η zeigen, daß die Evolute wieder eine Epizykloide ist. Um die Ähnlichkeit dieser Ausdrücke mit denen für x und y noch mehr hervortreten zu lassen, führen wir ein neues Koordinatensystem X, Y ein, das aus dem System x, y durch Drehung um einen gewissen Winkel α hervorgeht, d. h. wir setzen

$$X = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha = b_1(m\cos(t-\alpha) - \cos(mt-\alpha)),$$

$$Y = -\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha = b_1(m\sin(t-\alpha) - \sin(mt-\alpha)).$$

Wird nun $\alpha = \frac{\pi}{m-1} = \frac{b\pi}{a}$ angenommen und $t - \alpha$ gleich τ gesetzt, so folgt

$$X = b_1(m\cos\tau + \cos m\tau); \quad Y = b_1(m\sin\tau + \sin m\tau).$$

Der rollende Kreis hat für diese Epizykloide den Radius $b_1 = \frac{ab}{a+2b}$, der feste den Radius $a_1 = \frac{a^2}{a+2b}$. Die Evolute ist der Grundkurve ähnlich, da $a_1 : b_1 = a : b$ ist.

40. Zu zeigen, daß die Evolute der logarithmischen Spirale $r = a^t$ eine der Grundkurve kongruente Spirale ist.

Setzt man $x = a^t \cdot \cos t = \varphi(t)$, $y = a^t \cdot \sin t = \psi(t)$, so wird nach Aufg. 25, S. 162:

$$\frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''} = \frac{r^2 + r'^2}{r^2 + 2r'^2 - rr''} = 1,$$

daher

$$\xi = -a^t \ln a \cdot \sin t, \quad \eta = a^t \ln a \cdot \cos t.$$

Der Radiusvektor des Krümmungsmittelpunktes wird $r = a^t \cdot \ln a = a^{t+t_0}$, wenn man $\ln a = a^{t_0}$ setzt. Die Kurve $r = a^{t+t_0}$ unterscheidet sich aber von der Grundkurve $r = a^t$ nur in der Lage. Sie geht nämlich aus ihr durch Drehung um einen gewissen Winkel t_0 hervor.

41. In der Gleichung $r = a^t$ der logarithmischen Spirale soll a so bestimmt werden, daß die Evolute der Kurve mit der Grundkurve selbst zusammenfällt.

Für die Evolute hat man nach Aufg. 40 die Parameterdarstellung

$$\xi = -a^t \ln a \cdot \sin t = a^t \ln a \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\eta = a^t \ln a \cdot \cos t = a^t \ln a \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

und $r = a^t \cdot \ln a$ als Gleichung in Polarkoordinaten. Der Krümmungsmittelpunkt C des Punktes P der Spirale hat somit die Polarkoordinaten

$$r_1 = a^t \ln a, \; t_1 = t + \frac{\pi}{2} - 2k\pi,$$

wo k eine *positive* ganze Zahl bedeutet, denn der Punkt C muß jedenfalls *innerhalb* derjenigen Windung der Grundkurve gelegen sein, die durch P geht. Nun wird verlangt, daß C auf der gegebenen Kurve $r = a^t$ liege. Es soll also die Gleichung bestehen

$$a^t \ln a = a^{t + \frac{\pi}{2} - 2k\pi} \quad \text{oder} \quad \ln a = a^{\frac{\pi}{2} - 2k\pi},$$

wo $k = 1, 2, 3, \cdots$ ist. Den Werten von k entsprechend gibt es, wie man sieht, unendlich viele logarithmische Spiralen, die mit ihrer Evolute zusammenfallen. Der Fall $k = 1$ liefert eine Gleichung $\ln a = a^{-\frac{3\pi}{2}}$, die angenähert durch $a = 1{,}3158$ erfüllt wird. Der nach Aufg. 31, S. 54, konstante Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor ist für diese Kurve angenähert gleich $74^0\,39'\,10''$.

42. Zu beweisen, daß der Krümmungsradius eines Punktes P der logarithmischen Spirale $r = a^t$ so groß wie die Polarnormale von P ist.

Wie schon in Aufgabe 40 bemerkt wurde, ist hier

$$\frac{r^2 + r'^2}{r^2 + 2r'^2 - rr''} = 1,$$

daher $\varrho = \sqrt{r^2 + r'^2}$, und derselbe Ausdruck stellt nach Nr. 4, S. 66, die Polarnormale dar. Hieraus folgt eine Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes als Endpunktes der Polarnormale; die Normale kann dabei unter Benutzung der Tatsache gezeichnet werden, daß nach Aufg. 31, S. 54, der Winkel, den die Normale von P mit dem Radiusvektor bildet, bei der logarithmischen Spirale konstant ist.

Ferner folgt, daß die Krümmungsmittelpunkte aller Punkte, die aus der Spirale von einer durch den Pol O der Kurve gehenden Geraden g ausgeschnitten werden, auf einer Geraden g_1 liegen, die rechtwinklig zu g durch O geht, ein Satz, der als spezieller Fall in dem folgenden weit allgemeineren Satz enthalten ist:

43. Die Krümmungsmittelpunkte, die zu den Schnittpunkten der logarithmischen Spirale $r = a^t$ mit einer beliebigen Kurve $f(x, y) = 0$ gehören, liegen auf einer zu $f(x, y) = 0$ ähnlichen Kurve; nach Drehung

der einen Kurve um einen rechten Winkel sind beide auch ähnlich liegend. Dieser Satz soll bewiesen werden.

Ist $P(x, y)$ einer der Schnittpunkte, so hat sein Krümmungsmittelpunkt C nach Aufg. 40 die Koordinaten

$$\xi = -y \ln a,\ \eta = x \ln a,\ \text{wo } f(x, y) = 0.$$

Bei Einführung von $x = \eta : \ln a$, $y = -\xi : \ln a$ in $f(x, y) = 0$ erhält man die Gleichung einer zur Kurve $f(x, y) = 0$ ähnlichen Kurve, auf der die zu den Schnittpunkten P gehörigen Punkte C gelegen sind. Im Fall $a = e$ sind beide Kurven kongruent.

44. Eine Archimedische Spirale $r = at$ werde von einer durch den Pol des Koordinatensystems gehenden Geraden g geschnitten. Man zeige, daß die zu den unendlich vielen Schnittpunkten gehörigen Krümmungsmittelpunkte auf einer Ellipse liegen. Außerdem soll bewiesen werden, daß die zu verschiedenen Richtungen von g gehörigen Ellipsen sämtlich einander kongruent sind.

Der zu einem Punkt t der Spirale gehörige Krümmungsmittelpunkt hat die Koordinaten

$$\xi = \frac{at\cos t - a(t^2+1)\sin t}{t^2+2},\ \eta = \frac{at\sin t + a(t^2+1)\cos t}{t^2+2}.$$

Bildet die Gerade g mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel α, so kommen für t nur die Werte $\alpha + 2k\pi$ in Betracht, wo k eine ganze positive oder negative Zahl oder auch Null ist. Durch Einführung der Größen $\lambda = \alpha + 2k\pi$, $m = \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$, $n = \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$ verwandeln sich die Ausdrücke für ξ und η in:

$$\xi = \frac{am\lambda - an(\lambda^2+1)}{\lambda^2+2},\ \eta = \frac{an\lambda + am(\lambda^2+1)}{\lambda^2+2},$$

aus denen durch Elimination von λ die Gleichung

$$(m^2+2n^2)\xi^2 + (n^2+2m^2)\eta^2 - 2mn\xi\eta + 3a(n\xi - m\eta) + a^2 = 0$$

oder

$$(1+\sin^2\alpha)\xi^2 + (1+\cos^2\alpha)\eta^2 - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\xi\eta$$
$$+ 3a\sin\alpha\cdot\xi - 3a\cos\alpha\cdot\eta + a^2 = 0$$

hervorgeht. Mit Hilfe der aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte bekannten Methoden findet man, daß diese Gleichung eine Ellipse darstellt, deren Mittelpunkt die Koordinaten

$$x = -\tfrac{3}{4}a\sin\alpha,\ y = \tfrac{3}{4}a\cos\alpha$$

hat. Die Achsen der Kurve fallen in die Richtung α bzw. die dazu rechtwinklige Richtung. Auf die Haupt- und Nebenachse als Koordinatenachsen bezogen hat die Gleichung der Ellipse die Gestalt:

$$X^2 + 2Y^2 - \tfrac{1}{8}a^2 = 0,$$

die Halbachsen $\frac{1}{4}a\sqrt{2}$ und $\frac{1}{4}a$ der Kurve sind somit von α unabhängig,

d. h. alle zu den verschiedenen Richtungen α von g gehörigen Ellipsen sind einander kongruent, ihre Mittelpunkte liegen auf dem Kreis

$$x^2 + y^2 = \tfrac{9}{16} a^2.$$

45. Man beweise den Satz: Wenn die Radien der Krümmungskreise, die den einander folgenden Punkten eines beliebigen Kurvenbogens zugehören, entweder stetig wachsen oder stetig abnehmen, so schneiden sich die zu den Punkten dieses Bogens gehörigen Krümmungskreise *nie* in reellen Punkten.[1]) Es gibt z. B. unter den unendlich vielen Krümmungskreisen einer logarithmischen Spirale keine zwei, die sich in reellen Punkten schneiden.

Sind C_1, C_2 die unter der gemachten Voraussetzung zu zwei Kurvenpunkten P_1, P_2 gehörigen Krümmungsmittelpunkte, so ist jedenfalls die Sehne $C_1 C_2$ kleiner als der Evolutenbogen $C_1 C_2$, somit $C_1 C_2 < |\varrho_1 - \varrho_2|$, nach Nr. 6, S. 155, d. h. der Abstand der Mittelpunkte der beiden Krümmungskreise ist kleiner als die Differenz ihrer Radien, der eine Kreis muß somit ganz innerhalb des anderen liegen.

§ 19.

Hüllkurve eines Systems ebener Kurven und Hüllfläche eines Systems von Flächen.

1. Eine Gleichung $f(x,y,\alpha) = 0$, in der f eine eindeutige stetige Funktion sei, stellt entsprechend den unendlich vielen Werten, die man dem *Parameter* α erteilen kann, unendlich viele ebene Kurven dar, deren Gesamtheit man als System oder Schar von Kurven bezeichnet. Ändert sich α stetig, so erhält man eine stetige Folge von Kurven; zwei Kurven des Systems schneiden sich in mehreren Punkten, die gewisse Grenzlagen einnehmen, wenn die Kurven unendlich nahe benachbart sind. Der geometrische Ort aller dieser zwei benachbarten Systemkurven gemeinsamen Grenzpunkte ist die *Hüllkurve* oder *Enveloppe.* Sie berührt jede Systemkurve in ihren Grenzpunkten.

Die Gleichung der Hüllkurve wird erhalten, indem man entweder aus $f(x,y,\alpha) = 0$ und $\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} = 0$ den Parameter α eliminiert, oder diese beiden Gleichungen nach x und y auflöst, so daß etwa $x = \varphi(\alpha)$ und $y = \psi(\alpha)$ die Parameterdarstellung der Hüllkurve bilden. Haben die Kurven des Systems singuläre Punkte, so bildet deren geometrischer Ort einen Teil der Hüllkurve. Übrigens tritt keine eigentliche Hüllkurve auf, wenn die Gleichung $f(x, y, \alpha) = 0$ den Para-

1) Vgl. A. Kneser, Math. Annalen, Bd. 31 (1888), S. 526; ferner Tait, Proceedings Edinburgh math. society, Bd. 14 (1895), S. 26.

meter α algebraisch nur linear und nicht mindestens im zweiten Grad enthält. Denn würde α nur algebraisch linear auftreten, so wäre $f(x,y,\alpha)=0$ die Gleichung eines Kurvenbüschels, dessen einzelne Kurven nur die Grundpunkte des Büschels gemeinsam haben. Auch darf die Determinante

$$\begin{vmatrix} f'(x) & f'(y) \\ f''(x,\alpha) & f''(y,\alpha) \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwinden.

2. Sind zwei Parameter α und β vorhanden, die an eine Bedingungsgleichung $\varphi(\alpha,\beta)=0$ gebunden sind, so findet man die Hüllkurve des Kurvensystems $f(x,y,\alpha,\beta)=0$ durch Elimination der Parameter α,β und eines als Hilfsgröße eingeführten Multiplikators λ aus den vier Gleichungen

$$f(x,y,\alpha,\beta)=0,\ \varphi(\alpha,\beta)=0,\ \frac{\partial f}{\partial\alpha}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0,\ \frac{\partial f}{\partial\beta}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=0.$$

Auch könnte man vermöge $\varphi(\alpha,\beta)=0$ einen der beiden Parameter aus $f(x,y,\alpha,\beta)=0$ entfernen und dann das unter **1.** erwähnte Verfahren einschlagen.

3. Ähnlich wie durch die Gleichung $f(x,y,\alpha)=0$ ein System von ebenen Kurven gegeben ist, wird durch $f(x,y,z,\alpha)=0$ ein System von Flächen dargestellt. Zwei benachbarte Flächen desselben schneiden sich in einer Kurve, der sogenannten *Charakteristik* der betreffenden Fläche α, und die Gesamtheit dieser Kurven erfüllt die *Hüllfläche* oder *Enveloppe* des gegebenen Systems. Sie berührt jede Systemfläche längs ihrer Charakteristik.

Die Gleichung der Hüllfläche wird durch die Elimination von α aus $f(x,y,z,\alpha)=0$ und $\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0$ erhalten. Für zwei unendlich nahe benachbarte Charakteristiken bestehen die Gleichungen $f(x,y,z,\alpha)=0$, $\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}=0$; denkt man sich mit ihrer Hilfe x, y, z als Funktionen von α bestimmt, so ergibt sich die Parameterdarstellung einer Raumkurve, des Ortes aller zwei benachbarten Charakteristiken gemeinsamen Grenzpunkte. Diese Kurve wird als *Rückkehrkante* oder *Gratlinie* der Hüllfläche bezeichnet; sie berührt jede Charakteristik in den zugehörigen Grenzpunkten. Jetzt dürfen nicht sämtliche Determinanten der Matrix

$$\left\|\begin{matrix} f'(x) & f'(y) & f'(z) \\ f''(x,\alpha) & f''(y,\alpha) & f''(z,\alpha) \end{matrix}\right\|$$

verschwinden.

Beispiele.

1. Welche Kurve ist die Hüllkurve des Systems von Kreisen, das entsteht, wenn um sämtliche Punkte der x-Achse als Mittelpunkte Kreise von demselben Radius r gezeichnet werden?

Die Hüllkurve besteht aus den beiden im Abstand r zur x-Achse parallel gezogenen Geraden $y = r$ und $y = -r$, wie übrigens geometrisch einleuchtet.

2. Welche Kurve ist die Hüllkurve des Systems von Kreisen

$$(x - \alpha)^2 + y^2 - 4\alpha = 0?$$

Man findet die Parabel $y^2 - 4(x + 1) = 0$.

3. Ein rechter Winkel bewegt sich derart, daß der eine Schenkel durch einen festen Punkt $x = a$ der Abszissenachse geht, während der Scheitel auf der y-Achse fortrückt. Welche Kurve wird von dem freien Schenkel umhüllt?

Trifft der freie Schenkel die y-Achse in $y = \alpha$, so lautet seine Gleichung $ax - \alpha y + \alpha^2 = 0$. Als Hüllkurve findet man die Parabel $y^2 - 4ax = 0$, die den festen Punkt $x = a$ zum Brennpunkt, die y-Achse zur Scheiteltangente hat.

4. Die Hüllkurve einer Geraden von der Länge a zu bestimmen, die mit ihren Endpunkten auf zwei zueinander rechtwinkligen Geraden (Koordinatenachsen) fortrückt.

Die Gleichung der beweglichen Geraden ist $x \sin \alpha - y \cos \alpha + a \sin \alpha \cos \alpha = 0$, wo α den Winkel bedeutet, den die Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. Für die Hüllkurve ergibt sich die Parameterdarstellung

$$x = -a \cos^3 \alpha, \; y = -a \sin^3 \alpha$$

oder die Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

einer Astroide (Sternkurve, Figur 75). Man kann ein Bild dieser Kurve dadurch herstellen, daß man zwischen die Koordinatenachsen Sand streut und nun die Strecke (einen Stab) von der Länge a in der angegebenen Weise verschiebt; bei dieser Bewegung wird der Sand beiseite geschoben und nun von der Astroide begrenzt.

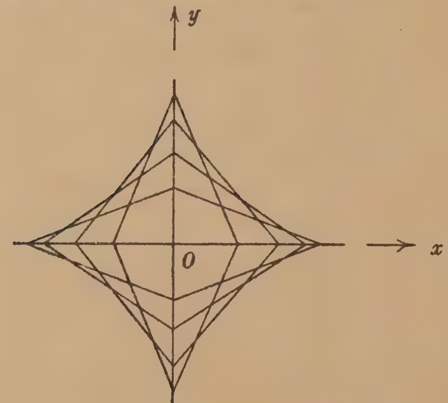


Fig. 75.

5. Die Hüllkurve der Geradenschar $x\varphi(t) + y\psi(t) - 1 = 0$ zu bestimmen.

Man findet

$$x = \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)}, \quad y = \frac{-\varphi'(t)}{\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)}.$$

6. Von allen Punkten der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ werden auf beide Koordinatenachsen Lote gefällt. Man bestimme die Hüllkurve der Verbindungslinien ihrer Fußpunkte, insbesondere auch für den Fall, daß die vorgelegte Kurve die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ oder $x = a\cos^2 t$, $y = b\sin^2 t$ ist.

Eine solche Verbindungslinie hat die Gleichung $\frac{x}{\varphi(t)} + \frac{y}{\psi(t)} - 1 = 0$, für die Hüllkurve folgt die Parameterdarstellung:

$$x = \frac{\varphi^2(t)\cdot\psi'(t)}{\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)}, \quad y = \frac{-\psi^2(t)\cdot\varphi'(t)}{\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)}.$$

Ist die ursprünglich gegebene Kurve die erwähnte Gerade, so wird die Hüllkurve $x = a\cos^4 t$, $y = b\sin^4 t$ oder $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, eine Parabel, die die Koordinatenachsen in $x = a$ bzw. $y = b$ berührt.

7. Man wende das Ergebnis der vorstehenden Aufgabe auf den Fall an, wo die gegebene Kurve die Ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ ist.

Man erhält die Kurve $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

die nach Aufg. 33, S. 165, die Evolute einer Ellipse mit den Halbachsen $\alpha = \frac{ab^2}{a^2 - b^2}$, $\beta = \frac{a^2 b}{a^2 - b^2}$ darstellt.

8. Gesucht wird die Hüllkurve des Systems von Ellipsen, deren Achsen zusammenfallen und deren Flächeninhalt konstant, gleich k^2, ist.

Eine Ellipse des Systems hat die Gleichung $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$; da der Flächeninhalt dieser Kurve gleich $\alpha\beta\pi$ ist, tritt die Bedingung $\alpha\beta\pi - k^2 = 0$ hinzu.

Die Hüllkurve wird durch die beiden gleichseitigen Hyperbeln $2\pi xy = \pm k^2$ gebildet.

9. Gesucht wird die Hüllkurve des Systems von Ellipsen, deren Achsen zusammenfallen, während die Summe der Quadrate der Halbachsen konstant, gleich k^2, ist.

Man findet die vier Geraden $\pm x \pm y = k$, die ein Quadrat einschließen.

10. Eine Gerade bewegt sich so, daß das aus ihren Abschnitten α, β auf den Koordinatenachsen eines schiefwinkligen Systems (Achsenwinkel ω) gebildete Parallelogramm den konstanten Flächeninhalt k^2 hat. Welche Kurve wird von der Geraden umhüllt?

Die Gerade hat in irgend einer Lage die Gleichung

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0,$$

wobei $\alpha\beta \sin\omega - k^2 = 0$ ist. Man findet als Hüllkurve die Hyperbel $xy = \frac{k^2}{4 \sin \omega}$.

11. Gegeben sind zwei feste Geraden (Koordinatenachsen), die sich unter einem Winkel ω schneiden; bewegt sich eine Gerade so, daß die Summe der von ihr auf den Koordinatenachsen abgeschnittenen Stücke konstant gleich m ist, so umhüllt sie eine Parabel.

Ist λ der Abschnitt auf der x-Achse, so hat eine Gerade des Systems die Gleichung $\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{m-\lambda} - 1 = 0$. Als Hüllkurve erhält man die Parabel $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{m} = 0$ oder

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2mx - 2my + m^2 = 0,$$

die die Koordinatenachsen in $x = m$ bzw. $y = m$ berührt.

Zur Konstruktion der Geradenschar trägt man auf beiden Achsen von ihrem Schnittpunkt O aus beliebig viele gleich große Stücke ab, deren Endpunkte durch Zahlen 1, 2, 3, ... bezeichnet werden, und verbindet nun solche Punkte der beiden Achsen miteinander, bei denen die Summe der beigefügten Zahlen gleich m ist. Alle diese Verbindungslinien sind Tangenten der Parabel.

Übrigens umhüllen die Verbindungslinien auch dann noch eine Parabel, wenn die Länge der auf der einen Achse abgetragenen gleich großen Strecken von der Länge der auf der anderen Achse abgetragenen Strecken verschieden ist (Fig. 76). Natürlich ist dann die Summe der Achsenabschnitte nicht mehr konstant. Man kann die Aufgabe auch so deuten, daß man zwei Punkte die Achsen mit zwei *konstanten*, gleichen oder verschiedenen, Geschwindigkeiten durchlaufen läßt, wobei der eine Punkt nach O hin, der andere von O weg rückt. Die Verbindungslinien dieser Punkte umhüllen alsdann eine Parabel, die beide Achsen berührt.

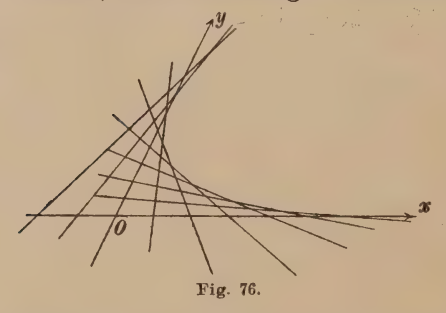


Fig. 76.

12. Man bilde die Parameterdarstellung für die Evolute der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ als der Hüllkurve sämtlicher Normalen dieser Kurve.

Die Gleichung der Normale ist (vgl. Nr. 1, S. 44):

$$\xi\varphi'(t) + \eta\psi'(t) - \varphi(t)\varphi'(t) - \psi(t)\psi'(t) = 0;$$

man erhält die in Nr. 2, S. 153, gegebenen Gleichungen (1).

13. Ist eine Kurve k Hüllkurve der Geraden $g \equiv x \cos t + y \sin t - f(t) = 0$, so ist die Evolute von k Hüllkurve der Geraden $g' \equiv -x \sin t + y \cos t - f'(t) = 0$.

Dies folgt daraus, daß $g' = 0$ die im Schnittpunkt P der Geraden g und g' gezogene Normale der Kurve k darstellt. Hieraus geht übrigens weiter hervor, daß $g'' \equiv -x \cos t - y \sin t - f''(t) = 0$ Normale der Evolute in dem zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkt ist. Der Abstand dieser Geraden $g'' = 0$ von ihrer Parallelen $g = 0$ ist der Krümmungsradius von P, nämlich in Übereinstimmung mit Aufg. 12, S. 158, gleich $f(t) + f''(t)$.

14. Aus dem Ergebnis vorstehender Aufgabe folgt, daß die Hüllkurve der Geraden $g \equiv x \cos t + y \sin t - f(t) = 0$ die Evolvente der Hüllkurve der Geraden $g' \equiv -x \sin t + y \cos t - f'(t) = 0$ ist.

Hiernach bilde man die Parameterdarstellung für die Evolvente eines Kreises, der eine Strecke a zum Radius und den Koordinatenanfang zum Mittelpunkt hat.

Der Kreis ist die Hüllkurve der Geraden $g' \equiv x \cos t + y \sin t - a = 0$, seine Evolvente die der Geraden $g \equiv x \sin t - y \cos t - at = 0$. Man findet für sie die Darstellung

$$x = a \cos t + at \sin t, \quad y = a \sin t - at \cos t.$$

15. Auch in der Theorie der Fußpunktkurven spielen die Hüllkurven eine wichtige Rolle. Ist nämlich eine Kurve $F(x_1, y_1) = 0$ sowie der zugehörige Pol Q mit den Koordinaten a, b gegeben, so kann man nach der Kurve $f(x, y) = 0$ fragen, die $F(x_1, y_1) = 0$ zur Fußpunktkurve hat; man bezeichnet sie als *negative Fußpunktkurve* der gegebenen Kurve. Zur umgekehrten Fragestellung vgl. § 10, S. 61ff.

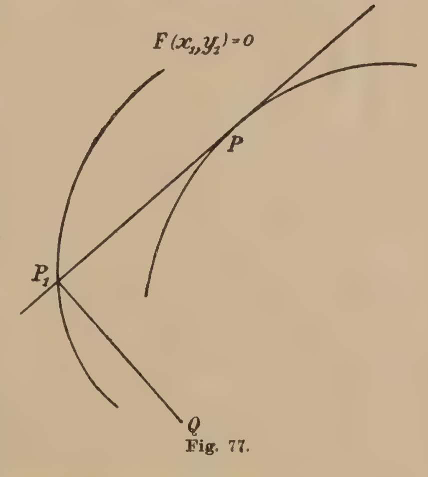


Fig. 77.

Die negative Fußpunktkurve wird vom einen Schenkel P_1P desjenigen rechten Winkels eingehüllt, dessen Scheitel P_1 die gegebene Kurve durchläuft, während der andere Schenkel stets durch Q geht (Fig. 77). Bildet P_1P mit der x-Achse einen Winkel α, für den $\operatorname{tg} \alpha = y'$ ist, so bestehen die drei Gleichungen

$$y_1 - y - (x_1 - x)y' = 0, \quad \text{ferner} \quad x_1 - a + (y_1 - b)y' = 0 \quad \text{und}$$
$$F(x_1, y_1) = 0.$$

Elimination von x_1, y_1 gibt die Gleichung einer Geradenschar in der Form $y = xy' + \psi(y')$. Die Hüllkurve dieser Geraden (mit y' als Parameter) ist die gesuchte negative Fußpunktkurve.

16. Man gebe die Parameterdarstellung der negativen Fußpunktkurve an, wenn die Kurve $F(x_1, y_1) = 0$ durch $x_1 = \Phi(t)$, $y_1 = \Psi(t)$ gegeben ist und der Pol Q die Koordinaten $x = a$, $y = b$ hat.

Hier hat man die beiden Gleichungen

$$\Psi(t) - y - (\Phi(t) - x)y' = 0 \quad \text{und} \quad \Phi(t) - a + (\Psi(t) - b)y' = 0;$$

aus ihnen ergibt sich durch Elimination von y':

$$\chi(t) \equiv x(\Phi(t) - a) + y(\Psi(t) - b) + a\Phi(t) + b\Psi(t) - \Phi^2(t) - \Psi^2(t) = 0,$$

und nun sind noch $\chi(t) = 0$ und $\chi'(t) = 0$ nach x und y aufzulösen. Im Fall $a = b = 0$ findet man

$$x = \Phi(t) - \Psi(t) \cdot M, \quad y = \Psi(t) + \Phi(t) \cdot M,$$

wobei

$$M = \frac{\Phi(t) \cdot \Phi'(t) + \Psi(t) \cdot \Psi'(t)}{\Phi(t) \cdot \Psi'(t) - \Psi(t) \cdot \Phi'(t)}$$

ist, und zwar bedeutet M die Größe $\cot(\alpha - \gamma)$, unter γ den Winkel verstanden, den der Radiusvektor OP_1 mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, während α den Winkel bezeichnet, den die im Sinne der wachsenden t im Punkt P_1 an die gegebene Kurve gezogene Tangente mit dieser Richtung der x-Achse einschließt.

Bei beliebigen Werten von a und b wird

$$x = \Phi(t) - (\Psi(t) - b)N, \quad y = \Psi(t) + (\Phi(t) - a)N,$$

wo N aus M hervorgeht, wenn man $\Phi(t)$ und $\Psi(t)$ in M durch $\Phi(t) - a$ bzw. $\Psi(t) - b$ ersetzt, während $\Phi'(t)$ und $\Psi'(t)$ nicht geändert werden. Auch jetzt ist $N = \cot(\alpha - \gamma)$, doch bedeutet nun γ den von der Geraden QP_1 mit der positiven Richtung der x-Achse gebildeten Winkel.

17. Die Frage nach der zu einer gegebenen Kurve gehörigen negativen Fußpunktkurve erledigt sich besonders einfach, wenn die Gleichung der gegebenen Kurve in Polarkoordinaten $r = f(t)$ vorliegt und sich der Pol Q im Koordinatenanfang befindet. Man hat alsdann nur die Hüllkurve der Geraden $x \cos t + y \sin t - f(t) = 0$ zu bestimmen; für sie ergibt sich die Parameterdarstellung

$$x = f(t) \cos t - f'(t) \sin t, \quad y = f(t) \sin t + f'(t) \cos t.$$

Vgl. auch Aufg. 12, S. 158, und Aufg. 13, S. 175.

18. Welche Kurve hat bei gegebenem Pol Q eine gegebene Gerade zur Fußpunktkurve? Die Gerade sei die y-Achse, Q habe die Koordinaten $x = a$, $y = 0$.

In der Bezeichnungsweise von Aufg. 16, S. 176, ist hier

$$x_1 = \Phi(t) = 0, \quad y_1 = \Psi(t) = t, \quad \chi(t) = -ax + ty - t^2 = 0.$$

Man erhält die Parabel $y^2 - 4ax = 0$, die Q zum Brennpunkt, die gegebene Gerade zur Scheiteltangente hat. Vgl. übrigens Aufg. 3, S. 172.

19. Welche Kurve hat bei gegebenem Pol Q $(x = a, y = 0)$ den Kreis $x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0$ zur Fußpunktkurve?

Hier ist $x_1 = \Phi(t) = r \cos t$, $y_1 = \Psi(t) = r \sin t$,

$$\chi(t) = x(r \cos t - a) + y \cdot r \sin t + ar \cos t - r^2 = 0.$$

Man erhält den Kegelschnitt $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - a^2} = 1$, der für $r > a$ eine Ellipse, für $r < a$ eine Hyperbel darstellt.

20. Welche Kurve hat die Parabel $y_1^2 - px_1 = 0$ zur Fußpunktkurve, wenn der Pol Q der Scheitel der Parabel ist?

Hier ist $x_1 = \frac{t^2}{p}$, $y_1 = t$, $\chi(t) = \frac{t^2 x}{p} + yt - \frac{t^4}{p^2} - t^2 = 0$. Man erhält die Neilsche Parabel

$$x = \frac{3t^2 + p^2}{p}, \quad y = -\frac{2t^3}{p^2},$$

oder, wenn t eliminiert wird, $y = \frac{2(x-p)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3p}}$.

21. Ein beliebiger Punkt P_1 der Fußpunktkurve, der ihm entsprechende Punkt P der Grundkurve k, der Pol Q und die Projektion R von Q auf die Normale des Punktes P der Grundkurve bilden die Ecken eines Rechtecks. Die durch P_1 gehende Diagonale ist die Normale des Punktes P_1 der Fußpunktkurve (Fig. 78); diese Normale geht daher stets durch die Mitte der Verbindungslinie von Q mit P. Dieser Satz soll bewiesen werden.

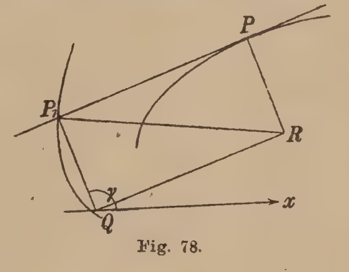


Fig. 78.

Ist γ der Winkel, den das auf die Tangente des Punktes P der Grundkurve k von Q aus gefällte Lot mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, und wählt man Q als Koordinatenanfang, so ist die Gleichung der Fußpunktkurve in Polarkoordinaten von der Form $r = f(\gamma)$, wo r die Länge des Lotes QP_1 bedeutet. Die in P gezogene Tangente von k hat die Gleichung

$$g \equiv x \cos \gamma + y \sin \gamma - f(\gamma) = 0,$$

die Normale dieses Punktes die Gleichung

$$-x \sin \gamma + y \cos \gamma - f'(\gamma) = 0$$

(vgl. Aufg. 13, S. 175), und der Abstand QR dieser Normale von Q ist gleich $f'(\gamma)$. Da aber $r' = f'(\gamma)$ auch die Länge der Polarsubnormale des Punktes P_1 der Fußpunktkurve darstellt (vgl. Nr. 4, S. 66), ist QR die zu P_1 gehörige Polarsubnormale, oder, anders ausgedrückt: die Normale des Punktes P_1 der Fußpunktkurve geht durch R.

22. Auch die Bestimmung der zu einer Kurve k gehörigen *Parallelkurven* läßt sich mit Hilfe der Theorie der Hüllkurven er-

ledigen, indem man eine solche Parallelkurve auffaßt als Hüllkurve der zu den Tangenten der Kurve k in einem konstanten Abstand l gezogenen Parallelen. Dies soll gezeigt werden, falls k durch eine Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben ist. Vgl. auch Aufg. 29, S. 53.

Jene Parallelenschar hat die Gleichung

$$x\psi' - y\varphi' - (\varphi\psi' - \psi\varphi') \pm l\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} = 0,$$

wo das Plus- und Minuszeichen zu setzen ist, da man zu einer Geraden zwei Parallelen im Abstand l ziehen kann, je eine auf jeder Seite der Geraden. Man gelangt zu denselben Formeln wie bei Aufg. 29, S. 53.

23. Für die *Parallelkurven* läßt sich auch die Gleichung in *Linienkoordinaten* leicht ableiten. Bevor dies gezeigt wird, möge an die Definition der Linienkoordinaten erinnert werden.

Eine beliebige Gerade, die nicht durch den Koordinatenanfang geht, kann durch die Abschnitte, die sie auf den Koordinatenachsen abschneidet, festgelegt werden. Ist ihre Gleichung $Ax + By + C = 0$, so sind diese Abschnitte

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B};$$

die mit entgegengesetzten Vorzeichen versehenen reziproken Werte

$$u = \frac{A}{C}, \quad v = \frac{B}{C}$$

dieser Abschnitte können gleichfalls zur Bestimmung der Geraden dienen. Diese Werte u, v hat Plücker als *Koordinaten einer Geraden* oder als *Linienkoordinaten* eingeführt, und zwar wurden diese Ausdrücke u, v und nicht die Achsenabschnitte als Koordinaten der Geraden gewählt, weil u, v und die Parallelkoordinaten x, y durch die einfache Gleichung

$$ux + vy + 1 = 0$$

verbunden sind. Sie drückt also aus, daß der Punkt x, y auf der Geraden u, v liegt oder die Gerade u, v durch den Punkt x, y geht. Außerdem findet nun eine gewisse Reziprozität in folgender Weise ihren Ausdruck: Haben u, v bestimmte Zahlenwerte $u = u_0$, $v = v_0$, so stellt die Gleichung $u_0x + v_0y + 1 = 0$ in den laufenden Punktkoordinaten x, y die Gerade mit den Koordinaten $u = u_0$, $v = v_0$ dar; haben x, y bestimmte Zahlenwerte $x = x_0$, $y = y_0$, so stellt die Gleichung $x_0u + y_0v + 1 = 0$ in den laufenden Linienkoordinaten u, v den Punkt mit den Koordinaten $x = x_0$, $y = y_0$ dar. Wie also Wertepaare x, y, die einer Gleichung $f(x, y) = 0$ genügen, als Koordinaten von Punkten gedeutet, in ihrer Gesamtheit die Kurve $f(x, y) = 0$ als eine Aufeinanderfolge von Punkten darstellen, so liefern Wertepaare u, v, die einer Gleichung $F(u, v) = 0$ genügen, als Koordinaten von Geraden gedeutet, in ihrer Gesamtheit

eine Aufeinanderfolge von Geraden, und die Kurve $F(u, v) = 0$ erscheint nunmehr als die Hüllkurve ihrer Tangenten.

Gehen wir zurück zur vorliegenden Aufgabe. Eine Tangente einer Parallelkurve der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ist durch

$$x\psi' - y\varphi' - (\varphi\psi' - \psi\varphi') \pm l\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} = 0$$

gegeben (vgl. Aufg. 22, S. 178); daher hat diese Gerade Linienkoordinaten u, v, für die die Gleichungen bestehen:

$$\sigma u = \psi', \quad \sigma v = -\varphi', \quad \text{wobei} \quad \sigma = -(\varphi\psi' - \psi\varphi') \pm l\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}.$$

Durch Elimination von σ und t erhält man die Gleichung der Parallelkurve $F(u, v) = 0$ in Linienkoordinaten u, v.

24. Man wende dieses Verfahren bei der Ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ an.

Hier ergibt sich

$$\sigma u = b\cos t, \quad \sigma v = -a\sin t, \quad \sigma = -ab \pm l\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t},$$

und $F(u, v) = 0$ wird:

$$\{u^2(a^2 - l^2) + v^2(b^2 - l^2) + 1\}^2 - 4(a^2u^2 + b^2v^2) = 0,$$

was sich auch in der Form

$$\{u^2(a^2 - l^2) + v^2(b^2 - l^2) - 1\}^2 - 4l^2(u^2 + v^2) = 0$$

schreiben läßt.

25. Die Hüllkurve aller Kreise zu bestimmen, die einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden, während ihre Mittelpunkte eine gegebene Kurve erfüllen. Hierbei sei $x^2 + y^2 = k^2$ die Gleichung des festen Kreises und $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ die Parameterdarstellung der festen Kurve.

Ein Kreis des Systems hat die Gleichung

$$f(x, y, t) \equiv x^2 + y^2 - 2x\varphi(t) - 2y\psi(t) + k^2 = 0;$$

aus ihr und aus $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ist entweder t zu eliminieren, oder man löst beide Gleichungen nach x und y auf. Das zweite Verfahren ergibt: $x = \sigma\psi'(t)$, $y = -\sigma\varphi'(t)$, wo zur Abkürzung

$$\sigma = \frac{\varphi\psi' - \psi\varphi' \pm \sqrt{(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2 - k^2(\varphi'^2 + \psi'^2)}}{\varphi'^2 + \psi'^2}$$

gesetzt ist. Die so erzeugten Kurven bezeichnet man nach Th. Moutard als *anallagmatische Kurven.*[1])

1) Vom griechischen ἀλλάττειν, ändern, abgeleitet, dem ein α privativum vorgesetzt ist. Damit soll angedeutet werden, daß diese Kurven bei Transformation durch reziproke Radien mit dem gegebenen festen Kreis als Inversionskreis in sich selbst übergehen. Näheres über diese Kurven findet man z. B. bei G. Loria, „Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven“, deutsche Ausgabe von F. Schütte, Leipzig 1902, S. 358—363.

26. Wird ein *im leeren Raum* befindlicher materieller Punkt P zur Zeit $t = 0$ aus dem Koordinatenanfang O mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 weggeschleudert, so beschreibt P eine ebene Kurve. Bildet die Richtung von v_0 mit der positiven Richtung einer in der Ebene der Kurve gelegenen horizontalen x-Achse den Winkel α, so hat P zur Zeit t die Koordinaten $x = v_0 t \cos\alpha$, $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$, wo g die Beschleunigung der Schwere bezeichnet. Der Punkt P beschreibt eine Parabel mit der Gleichung

$$f(x, y, \alpha) \equiv g x^2 - v_0^2 x \sin 2\alpha + 2 v_0^2 y \cos^2 \alpha = 0.$$

Man bestimme die Hüllkurve der zu verschiedenen *Elevationswinkeln* α gehörigen Parabeln.

Aus $f(x, y, \alpha) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ folgt durch Elimination von α die Gleichung $g^2 x^2 + 2 g v_0^2 y - v_0^4 = 0$, die eine zur y-Achse symmetrisch gelegene Parabel darstellt. Nach Einführung der höchsten Höhe $h = \frac{v_0^2}{2g}$, die bei der Anfangsgeschwindigkeit v_0 erreicht werden kann und von dem *vertikal* in die Höhe geworfenen Punkt wirklich erreicht wird, nimmt die Gleichung der umhüllenden Parabel, die in der Ballistik den Namen *Grenzparabel* führt, die Gestalt $x^2 = 4h(h - y)$ an (Fig. 79).

Alle betrachteten Wurfparabeln haben die Leitlinie gemeinsam und ihre Brennpunkte liegen auf einem Kreis, der den Punkt O zum Mittelpunkt hat und die Leitlinie berührt. Diese ist zugleich Scheitel-

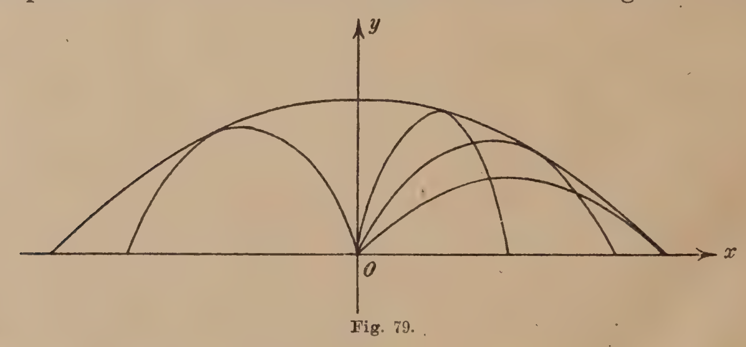


Fig. 79.

tangente der Grenzparabel, deren Brennpunkt sich in O befindet. Der Beweis dieser Sätze ist nicht schwer.

Die Gesamtheit der Parabeln, die zu gleich großen, sich aber nach beliebigen Richtungen des *Raumes* erstreckenden Geschwindigkeiten v_0 gehören, hat zur Enveloppe die Fläche, die durch Rotation der Kurve $x^2 = 4h(h - y)$ um die y-Achse entsteht, also ein *Rotationsparaboloid.* Stellen, die *außerhalb* des Paraboloids liegen, können von dem weggeschleuderten materiellen Punkt überhaupt nicht getroffen werden, Stellen *innerhalb* des Paraboloids auf zwei verschiedene Arten (direkter

und indirekter Schuß), denn die Gleichung der Bahnkurve $f(x, y, \alpha) = 0$ liefert bei gegebenem Wertepaar x, y zwei Werte α. Stellen, die *auf* dem Rotationsparaboloid liegen, können nur auf eine Art getroffen werden.

27. Man bestimme die Hüllkurve der Leitlinien und die der Scheiteltangenten aller Parabeln, die den Brennpunkt gemeinsam haben und durch einen und denselben Punkt Q der Ebene gehen.

Der gemeinsame Brennpunkt werde als Koordinatenanfang gewählt und Q sei die Stelle $x = a$ der x-Achse. Die zur Leitlinie $\alpha x + \beta y + 1 = 0$ gehörige Parabel hat alsdann die Gleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{(\alpha x + \beta y + 1)^2}{\alpha^2 + \beta^2},$$

wobei nun noch der Forderung Rechnung zu tragen ist, daß diese Kurve durch den Punkt $x = a$, $y = 0$ gehen soll. Man findet als Bedingung hierfür die Gleichung $a^2\beta^2 - 2a\alpha - 1 = 0$, die von α und β erfüllt werden muß. Irgend eine Leitlinie des Systems von Parabeln hat alsdann die Gleichung

$$f(x, y, \beta) \equiv (a^2\beta^2 - 1)x + 2a\beta y + 2a = 0.$$

Mit Hilfe von $\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$ erhält man als Hüllkurve aller Leitlinien den Kreis $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, der Q zum Mittelpunkt und die Strecke von der Länge $OQ = a$ zum Radius hat (Fig 80).

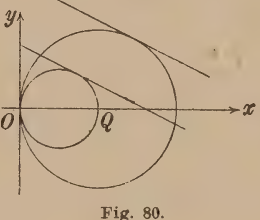


Fig. 80.

Da der Abstand der Scheiteltangente vom Brennpunkt der Parabel halb so groß ist wie der Abstand der Leitlinie $\alpha x + \beta y + 1 = 0$, so hat die Scheiteltangente die Gleichung

$$2\alpha x + 2\beta y + 1 = 0,$$

wobei wieder $a^2\beta^2 - 2a\alpha - 1 = 0$ ist. Für ihre Hüllkurve findet man $x^2 + y^2 - ax = 0$, d. h. den Kreis über OQ als Durchmesser.

Eine wichtige Anwendung findet die Theorie der Hüllkurven in der Optik bei den *Brennlinien* oder *Kaustiken*. Wenn von einem leuchtenden Punkt ausgehende Lichtstrahlen eine Kurve treffen und von ihr so zurückgeworfen (reflektiert) werden, daß der einfallende und der zurückgeworfene Strahl mit der Kurvennormale (dem Einfallslot) gleiche Winkel bilden, wobei diese Strahlen mit dem Einfallslot in einer und derselben Ebene liegen, so umhüllen die reflektierten Strahlen eine Kurve, die als *Brennlinie durch Reflexion* oder als *Katakaustik* bezeichnet wird. Werden die einfallenden Strahlen an der Kurve entsprechend dem Snelliusschen Brechungsgesetz gebrochen, so umhüllen die gebrochenen Strahlen eine *Brennlinie durch Refraktion* oder eine *Diakaustik*.

28. Eine Parabel wird rechtwinklig zu ihrer Achse von Lichtstrahlen getroffen, die nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen werden. Man bilde die Gleichung der entstehenden katakaustischen Kurve.

Es ist leicht einzusehen, daß ein in einem beliebigen Punkt P durch die Parabel reflektierter Strahl PQ zum Brennstrahl FP von P rechtwinklig ist (Fig. 81). Ist t der Parameter des Punktes P der durch $x = \frac{t^2}{p}$, $y = t$ gegebenen Parabel, so hat der Brennstrahl FP die Gleichung

$$4ptx + (p^2 - 4t^2)y - p^2t = 0$$

und der reflektierte Strahl PQ die Gleichung

$$(4t^2 - p^2)px + 4p^2ty - 4t^4 - 3p^2t^2 = 0.$$

Für die Katakaustik findet man die Parameterdarstellung

$$x = \frac{3t^2}{p}, \quad y = \frac{t(3p^2 - 4t^2)}{2p^2},$$

also eine rationale Kurve dritter Ordnung; durch Elimination von t erhält man für sie die Gleichung $108py^2 = x(4x - 9p)^2$. Die Kurve

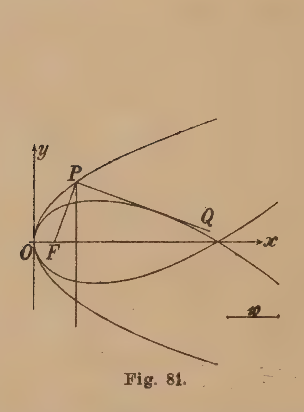


Fig. 81.

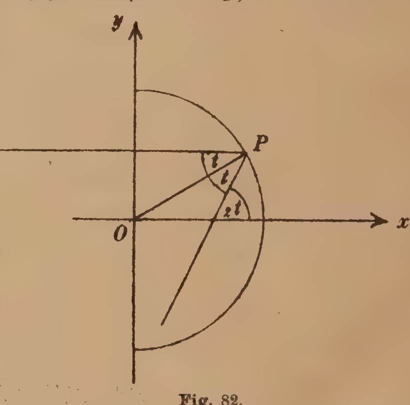


Fig. 82.

ist zur x-Achse symmetrisch und hat an der Stelle $x = \frac{9}{4}p$, $y = 0$ einen Doppelpunkt. Vgl. Fig. 81, wo $p = 16$ angenommen wurde.

29. Für den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ die Brennlinie durch Reflexion zu bestimmen, wenn der leuchtende Punkt auf der x-Achse im Unendlichen liegt.

Ein Strahl, der den Kreis in P trifft und mit dem Einfallslot den Winkel t bildet, geht durch die Reflexion in einen Strahl über, der mit der x-Achse den Winkel $2t$ bildet (Fig. 82) und daher die Gleichung hat

$$y - r\sin t = (x - r\cos t)\operatorname{tg} 2t \text{ oder } x\operatorname{tg} 2t - y + r\sin t - r\operatorname{tg} 2t \cdot \cos t = 0.$$

Hierzu tritt $\frac{2x}{\cos^2 2t} + r\cos t + r\operatorname{tg} 2t \cdot \sin t - \frac{2r\cos t}{\cos^2 2t} = 0$ oder auch $x = \frac{1}{4}r(3\cos t - \cos 3t)$; für y folgt $y = \frac{1}{4}r(3\sin t - \sin 3t)$.

Die Gleichungen zeigen unmittelbar, daß die Kurve als *Epizykloide* erzeugt werden kann. Allgemein hat man nämlich für eine Epizykloide, die dadurch entsteht, daß ein Kreis vom Radius b auf einem festen Kreis vom Radius a ohne Gleiten rollt, die Parameterdarstellung:

$$x = (a + b)\cos t - b\cos\frac{a+b}{b}t, \quad y = (a + b)\sin t - b\sin\frac{a+b}{b}t.$$

Hierbei liegt der die Kurve beschreibende Punkt P zu Anfang der Bewegung ($t = 0$) an der Stelle $x = a$ der x-Achse auf dem festen Kreis, links vom Mittelpunkt des beweglichen Kreises (vgl. auch Aufg. 39, S. 166, wo P zu Anfang der Bewegung rechts vom Mittelpunkt des rollenden Kreises lag). Man findet $a = \frac{1}{2}r$, $b = \frac{1}{4}r$, der Radius b muß daher halb so groß sein wie der Radius a. An den Stellen $t = 0$ und $t = \pi$, d. h. in den Punkten $x = \frac{1}{2}r$, $y = 0$ und $x = -\frac{1}{2}r$, $y = 0$ hat die Kurve Spitzen. Nach Elimination von t lautet ihre Gleichung:

$$\{4(x^2 + y^2) - r^2\}^3 - 27r^4y^2 = 0.$$

30. Man zeige, daß der ursprünglich vom Punkt $x = a$, $y = b$ ausgehende, aber durch einen Punkt P der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ reflektierte Lichtstrahl die Gleichung $T_1 N + N_1 T = 0$ hat, wenn $N = 0$ und $T = 0$ die Normale und Tangente von P darstellen, während N_1 und T_1 die Ergebnisse der Substitution von $x = a$, $y = b$ in N und T bedeuten.[1])

Der einfallende Lichtstrahl hat eine Gleichung von der Form $N - \lambda T = 0$, denn er geht durch den Schnittpunkt P von $N = 0$ und $T = 0$. Hierbei ist λ so zu bestimmen, daß die Gleichung $N - \lambda T = 0$ durch $x = a$, $y = b$ erfüllt wird, d. h. man hat $N_1 - \lambda T_1 = 0$, oder der einfallende Strahl ist gegeben durch $T_1 N - N_1 T = 0$. Nun ist der reflektierte Strahl der vierte harmonische zum einfallenden mit Bezug auf das Geradenpaar $N = 0$, $T = 0$ und hat daher die Gleichung $T_1 N + N_1 T = 0$.

31. Man wende dieses Verfahren zur Bestimmung der Katakaustik des Kreises $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ an, wenn der leuchtende Punkt nicht wie bei Aufg. 29 im Unendlichen liegt, sondern die Koordinaten $x = a$, $y = b$ hat.

Hier wird $N \equiv x\sin t - y\cos t$, $T \equiv x\cos t + y\sin t - r$,

$$T_1 N + N_1 T \equiv -(bx + ay)\cos 2t + (ax - by)\sin 2t + r(y + b)\cos t - r(x + a)\sin t = 0,$$

---

1) Vgl. G. Salmon „Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven", deutsch bearbeitet von W. Fiedler, 2. Aufl. Leipzig 1882, S. 124.

also ein Ausdruck von der Gestalt

$$\alpha \cos 2t + \beta \sin 2t + \gamma \cos t + \delta \sin t = 0.$$

Mit Hilfe der schon S. 13 (vgl. die Fußnote daselbst) erwähnten Substitution $\cos t + i \sin t = p$, $\cos t - i \sin t = 1 : p$, wobei $i = \sqrt{-1}$ ist, wird $T_1 N + N_1 T = 0$ gleichbedeutend mit

$$\varphi(p) \equiv (\alpha - \beta i)p^4 + (\gamma - \delta i)p^3 + (\gamma + \delta i)p + \alpha + \beta i = 0,$$

und nun ist p aus dieser Gleichung und aus $\varphi'(p) = 0$ zu eliminieren. Das Ergebnis ist bekanntlich zugleich die Bedingung, die zwischen den Koeffizienten von $\varphi(p)$ bestehen muß, wenn die Gleichung $\varphi(p) = 0$ zwei gleiche Wurzeln haben soll: die Diskriminante von $\varphi(p)$ muß verschwinden (vgl. auch Aufg. 33, S. 21). Wie man in den Lehrbüchern der Algebra und der Invariantentheorie findet, hat die Diskriminante, für die Gleichung vierten Grades $a_0 p^4 + 4a_1 p^3 + 6a_2 p^2 + 4a_3 p + a_4 = 0$ gebildet, die Gestalt $S^3 - 27T^2$,

$$\text{wo } S = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \quad T = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \text{ ist.}$$

Im vorliegenden Fall ist $a_2 = 0$, und man findet

$$4S = 4(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - r^2\{(x+a)^2 + (y+b)^2\},$$
$$8T = r^2(bx - ay)(x^2 + y^2 - a^2 - b^2);$$

die gleich Null gesetzte Diskriminante von $\varphi(p)$ liefert daher folgende Gleichung der Brennlinie durch Reflexion:

$$[4(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - r^2\{(x+a)^2 + (y+b)^2\}]^3$$
$$- 27r^4(bx - ay)^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 = 0.$$

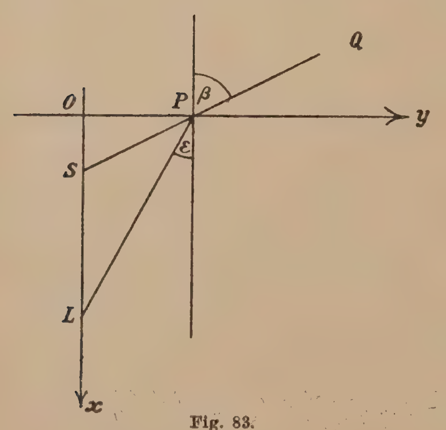


Fig. 83.

32. Man bestimme die Brennlinie durch *Refraktion* (Gleichung der Diakaustik) für Lichtstrahlen, die von einem Punkt L ausgehen und durch eine Gerade g entsprechend dem Snelliusschen Brechungsgesetz $\sin \varepsilon = n \sin \beta$ gebrochen werden.

Die Gerade g sei die y-Achse, L liege auf der positiven x-Achse im Abstand a vom Koordinatenanfang O; dabei möge die y-Achse horizontal liegen und die positive x-Achse sich vertikal nach unten erstrecken (Fig. 83). Ein von L ausgehender Lichtstrahl treffe die y-Achse in P und werde in der Richtung nach Q gebrochen, so daß die Verlängerung von QP die x-Achse in S trifft. Alsdann ist

$OP = a \operatorname{tg} \varepsilon$, $OS = a \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \cot \beta = \frac{a \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \beta}$, und die Gleichung des gebrochenen Strahles wird daher $f(x, y, \beta, \varepsilon) \equiv x \operatorname{tg} \beta + y - a \operatorname{tg} \varepsilon = 0$, wobei $\varphi(\beta, \varepsilon) \equiv \sin \varepsilon - n \sin \beta = 0$ ist. Nun wird (vgl. die S. 171 in Nr. 2 angeführte Regel)

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = -\frac{a}{\cos^2 \varepsilon} + \lambda \cos \varepsilon = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{x}{\cos^2 \beta} - n\lambda \cos \beta = 0,$$

daher

$$x = \lambda n \cos^3 \beta = \frac{a n \cos^3 \beta}{\cos^3 \varepsilon},$$

$$y = a \operatorname{tg} \varepsilon - x \operatorname{tg} \beta = \frac{a \operatorname{tg} \varepsilon (\sin^2 \beta - \sin^2 \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{a n (1 - n^2) \sin^3 \beta}{\cos^3 \varepsilon}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{x}{an} = \frac{\cos^3 \beta}{\cos^3 \varepsilon}, \quad \frac{y}{an} \sqrt{1 - n^2} = \frac{(1 - n^2)^{\frac{3}{2}} \sin^3 \beta}{\cos^3 \varepsilon}$$

oder nach Elimination von β und ε:

$$\left(\frac{x}{an}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y \sqrt{1 - n^2}}{an}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Je nachdem $n < 1$ oder > 1 ist, stellt diese Gleichung die Evolute einer Ellipse oder Hyperbel dar. Da die Evolute der Ellipse $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ die Gleichung hat

$$\left(\frac{a_1 x}{a_1^2 - b_1^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b_1 y}{a_1^2 - b_1^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

(vgl. Aufg. 33, S. 165), erhält man im Fall $n < 1$ für die Halbachsen dieser Ellipse die Längen $a_1 = \frac{a}{n}$, $b_1 = \frac{a}{n} \sqrt{1 - n^2}$; ihre lineare Exzentrizität wird $\sqrt{a_1^2 - b_1^2} = a$, die Lichtquelle L liegt daher im einen Brennpunkt der Ellipse. Alle durch die Gerade g gebrochenen Strahlen sind Normalen der Ellipse.

Der Punkt L erhält infolge der Strahlenbrechung eine scheinbare Verschiebung, nämlich:

in vertikaler Richtung um die Strecke $a - x = \frac{a(\cos^3 \varepsilon - n \cos^3 \beta)}{\cos^3 \varepsilon}$,

in horizontaler Richtung um $\frac{a n (1 - n^2) \sin^3 \beta}{\cos^3 \varepsilon}$.

33. Wenn sich der leuchtende Punkt L der vorhergehenden Aufgabe im Wasser befindet und aus der darüber befindlichen Luft in Richtung einer zum Wasserspiegel senkrechten durch L gehenden Geraden betrachtet wird, so erscheint er um ein Viertel der Tiefe a, in der er unter dem Wasserspiegel liegt, gehoben. Man zeige dies unter Benutzung der Tatsache, daß der Brechungsindex n bei dem Übergang aus Wasser in Luft gleich $\frac{3}{4}$ ist.

Jetzt ist $\beta = 0$, $\sin\varepsilon = n \sin\beta = 0$, $\cos\varepsilon = \cos\beta = 1$, daher die vertikale Verschiebung $a - x$ gleich $a(1 - n) = \frac{1}{4} a$.

34. Wie ist die Gleichung der *Kanalfläche* zu bilden, die als eingehüllte Fläche eines Systems von Kugeln entsteht, deren Radius konstant gleich r ist und deren Mittelpunkte die Raumkurve $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, $z = \psi(t)$, die sogenannte Leitlinie, durchlaufen? Insbesondere bilde man die Gleichung der Kanalfläche, wenn die Leitlinie der Kreis $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = 0$ ist.

Irgend eine Kugel des Systems hat die Gleichung

$$(x - \varphi)^2 + (y - \chi)^2 + (z - \psi)^2 - r^2 = 0;$$

die Elimination von t aus ihr und aus

$$(x - \varphi)\varphi' + (y - \chi)\chi' + (z - \psi)\psi' = 0$$

liefert die Gleichung der Kanalfläche.

In dem besonderen Fall, daß die Leitlinie der vorerwähnte Kreis ist, hat man die Gleichungen:

$$(x - a\cos t)^2 + (y - a\sin t)^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad \text{und} \quad x \sin t - y \cos t = 0.$$

Die Elimination von t ergibt

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

§ 20.

Beispiele zur Kurvendiskussion.

Man soll den Verlauf der folgenden Kurven untersuchen:

1. $$y = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Die Kurve kehrt im Intervall $-\infty < x < 2$ der positiven y-Achse die konvexe, im Intervall $2 < x < +\infty$ die konkave Seite zu; der Punkt $x = 2$, $y = 0$ ist ein Wendepunkt. Ein Maximum befindet sich an der Stelle $x = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{3} = 1{,}423$, $y = 0{,}385$, ein Minimum an der Stelle $x = 2 + \frac{1}{3}\sqrt{3} = 2{,}577$, $y = -0{,}385$. Der unendlich ferne Punkt der y-Achse ist ein Rückkehrpunkt, die unendlich ferne Gerade seine Tangente. Vgl. Fig. 2, S. 3.

2. $$y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Die Kurve ist zum Koordinatenanfang symmetrisch und hat diesen sowie die Punkte $x = +\sqrt{3}$, $y = +\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $x = -\sqrt{3}$, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ zu Wendepunkten. Alle drei Wendepunkte liegen auf der Geraden $x - 2y = 0$. Die x-Achse ist eine Asymptote der Kurve, die beiden anderen Asymptoten sind imaginär. Ein Maximum befindet sich an der Stelle $x = 1$, $y = 1$, ein Minimum an der Stelle $x = -1$, $y = -1$.

Der unendlich ferne Punkt der y-Achse ist ein isolierter Punkt. In den Intervallen $-\infty < x < -\sqrt{3}$ und $0 < x < +\sqrt{3}$ kehrt die Kurve der positiven y-Achse die konvexe, in den Intervallen $-\sqrt{3} < x < 0$ und $+\sqrt{3} < x < \infty$ die konkave Seite zu. (Fig. 84.)

3. $$y = \frac{x}{1 - x^2}.$$

Die Kurve ist zum Koordinatenanfang symmetrisch. Die x-Achse und die Geraden $x = \pm 1$ sind Asymptoten. Der Koordinatenanfang ist ein Wendepunkt, der unendlich ferne Punkt der y-Achse ein Doppelpunkt. In den Intervallen $-\infty < x < -1$ und $0 < x < +1$ kehrt

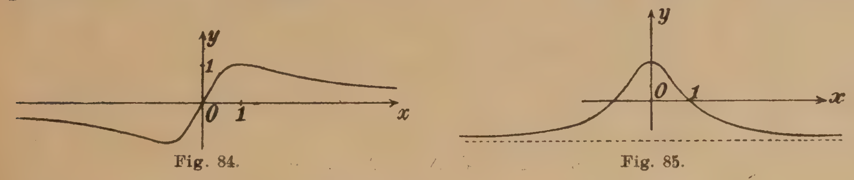


Fig. 84. Fig. 85.

die Kurve der positiven y-Achse die konkave, in den Intervallen $-1 < x < 0$ und $+1 < x < +\infty$ die konvexe Seite zu. Vgl. Fig. 3, S. 6.

4. $$y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Die Kurve ist zur y-Achse symmetrisch. Im Intervall $-\frac{1}{3}\sqrt{3} < x < +\frac{1}{3}\sqrt{3}$ kehrt sie der positiven y-Achse die konvexe, in ihrem übrigen Verlauf die konkave Seite zu. Die Punkte $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $y = +\frac{1}{2}$ sind Wendepunkte. Die Gerade $y = -1$ ist eine Asymptote, der unendlich ferne Punkt der y-Achse ein isolierter Punkt. Für $x = 0$ wird $y = 1$ ein Maximum. (Fig. 85).

5. $$y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$$

Die Kurve ist zur y-Achse symmetrisch. Im Intervall $-1 < x < +1$ kehrt sie der positiven y-Achse die konkave, in ihrem übrigen Verlauf die konvexe Seite zu. Die Geraden $x = \pm 1$ und $y = -1$ sind Asymptoten, der unendlich ferne Punkt der y-Achse ist ein Doppelpunkt. Für $x = 0$ wird $y = 1$ ein Minimum. (Fig. 86).

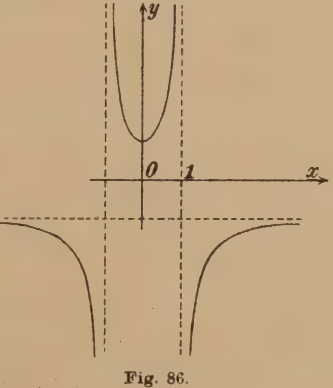


Fig. 86.

6. $$y = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Die Geraden $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ und $y = 0$ sind Asymptoten. In den Intervallen $-\infty < x < 1$ und $2 < x < 3$ kehrt die Kurve der positiven y-Achse die konvexe, in den Intervallen $1 < x < 2$ und

$3 < x < +\infty$ die konkave Seite zu. Der unendlich ferne Punkt der y-Achse ist ein dreifacher Punkt. Die extremen Werte der Ordinaten y gehören zu Abszissen x, die die Gleichung $3x^2 - 12x + 11 = 0$ erfüllen; für $x = 2 + \frac{1}{3}\sqrt{3} = 2{,}577$ wird $y = -2{,}598$ ein Maximum, für $x = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{3} = 1{,}423$ wird $y = 2{,}598$ ein Minimum. (Fig. 87.)

7. $$y^2 = x^3 + 1.$$

Die Kurve ist zur x-Achse symmetrisch. Oberhalb dieser Achse kehrt sie für $-1 < x < 0$ der positiven y-Achse die konvexe, für $0 < x < +\infty$ die konkave Seite zu; unterhalb der x-Achse ist ihr Verhalten bezüglich Konvexität und Konkavität gerade umgekehrt. Auf der y-Achse liegen drei Wendepunkte; für zwei ist hierbei $y = \pm 1$, und ihre Tangenten sind zur x-Achse parallel, der dritte liegt im Unendlichen und hat die unendlich ferne Gerade zur Wendetangente. (Fig. 88.)

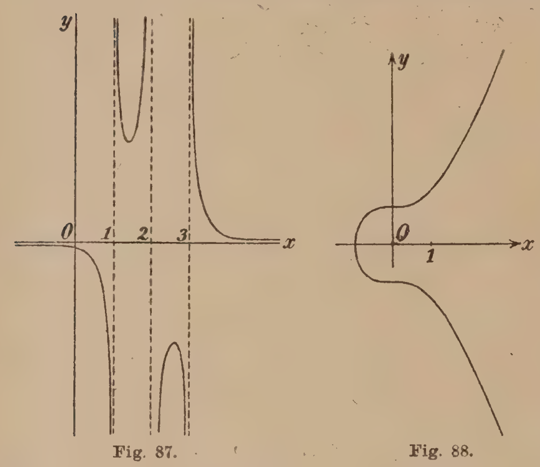


Fig. 87. Fig. 88.

8. Man untersuche den Verlauf der zu verschiedenen Werten des Exponenten m gehörigen *polytropischen (adiabatischen) Kurven* $pv^m = c$, wobei statt y und x die in der Wärmetheorie gebräuchlichen Buchstaben p und v benutzt sind. Es genügt, den Verlauf im ersten Quadranten zu betrachten. Dabei sollen alle Kurven durch einen und denselben Punkt p_1, v_1 gehen, so daß die Konstante c gleich $p_1 v_1^m$ ist. Vgl. Aufg. 23, S. 161.

Aus $\frac{d^2p}{dv^2} = \frac{m(m+1)p}{v^2}$ geht hervor, daß das Vorzeichen von $\frac{d^2p}{dv^2}$ im ersten Quadranten mit dem Vorzeichen von $m(m+1)$ übereinstimmt. Solange

$$-\infty < -m < -1$$

ist oder so lange $0 < m < \infty$ ist, kehrt die Kurve der positiven p-Achse die konkave Seite zu, für $-1 < m < 0$ die konvexe Seite. Für $m = -1$ erhält man die Gerade $p = cv$, für $m = 0$ die Gerade $p = c$, für $m = 1$ eine gleichseitige Hyperbel (Fig. 89). Falls m eine negative endliche Zahl ist, geht die Kurve durch den Koordinatenanfang, nicht aber bei positivem m. Die den Werten $m = \alpha : \beta$ und $m = \beta : \alpha$ zugehörigen Kurven stehen im

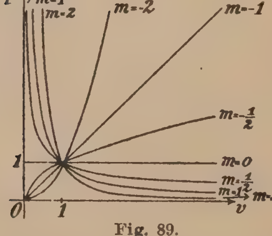


Fig. 89.

Fall $c = 1$ in der einfachen Beziehung zu einander, daß die eine aus der anderen durch Spiegelung an der Geraden $p = v$ hervorgeht. In der mechanischen Wärmetheorie ist übrigens stets $m > 1$, daher $\frac{dp}{dv} = -\frac{mp}{v} < 0$, d. h. der Druck nimmt mit wachsendem Volumen ab.

9. $$y = e^{-x^2}.$$

Die Kurve ist zur y-Achse symmetrisch. Im Intervall $-\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < +\frac{1}{2}\sqrt{2}$ kehrt sie der positiven y-Achse die konvexe, in ihrem übrigen Verlauf die konkave Seite zu. Die Punkte $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0{,}607$ sind Wendepunkte, die Ordinate wird für $x = 0$ ein Maximum $y = 1$. Die x-Achse ist eine Asymptote. (Fig. 90.)

10. $$y = xe^x.$$

Für $x > -2$ ist die Kurve konkav in Richtung der positiven y-Achse, für $x < -2$ konvex. Der Punkt $x = -2$, $y = -2:e^2 = -0{,}271$ ist ein Wendepunkt; für $x = -1$ wird $y = -1:e = -0{,}368$

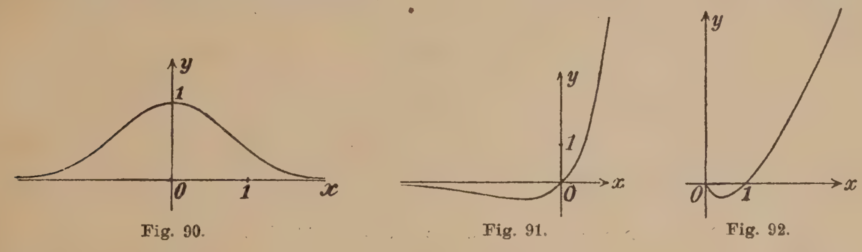


Fig. 90. Fig. 91. Fig. 92.

ein Minimum. Die x-Achse ist eine Asymptote. (Fig. 91).

11. $$y = x \cdot \ln x.$$

Die Kurve verläuft nur im ersten und vierten Quadranten des Koordinatensystems und kehrt hierbei der positiven Richtung der y-Achse stets die konkave Seite zu. Für $x = 1:e = 0{,}368$ wird $y = -1:e$ ein Minimum. Der Koordinatenanfang ist ein *Endpunkt* der Kurve. (Fig. 92.)

12. $$y = \frac{e^x}{x}.$$

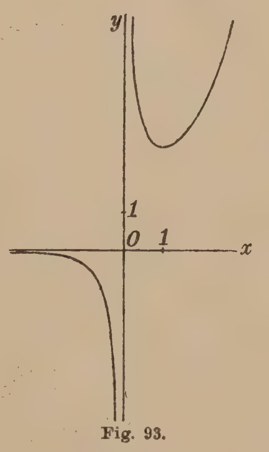


Fig. 93.

Für $x > 0$ ist die Kurve konkav in Richtung der positiven y-Achse, für $x < 0$ konvex. Die Geraden $x = 0$ und $y = 0$ sind Asymptoten, für $x = 1$ wird $y = e$ ein Minimum. (Fig. 93.)

13. Die Höhe des Wasserspiegels in einem Kanal von kreisförmigem Querprofil (Radius a) möge von der Höhe Null beginnend

steigen. Man stelle das Anwachsen der *Wassermenge* y im Querprofil graphisch dar (also *nicht* das Anwachsen der *Höhe* des Wasserspiegels), und zwar werde als unabhängige Veränderliche x der in Bogenmaß ausgedrückte Zentriwinkel genommen, der zu der den Stand des Wasserspiegels darstellenden Sehne gehört (Fig. 94). Alsdann untersuche man die Kurve, die die Abhängigkeit der Größe y von x darstellt.

Offenbar ist $y = \frac{a^2}{2}(x - \sin x)$.

Für $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ verschwinden y' und y'', nicht aber y''', daher sind die zugehörigen Kurvenpunkte Wendepunkte mit wagrechter Tangente und mit den Ordinaten $0, \pm a^2\pi, \pm a^2 \cdot 2\pi, \ldots$. Außerdem erhält man Wendepunkte für $x = \pm \pi, \pm 3\pi, \ldots$, und zwar ist bei ihnen die Steigung $y' = \operatorname{tg} \alpha = a^2$. (Fig. 95.) Natürlich kommen nur die Abszissen von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ in Betracht. Im Intervall $0 < x < \pi$ kehrt die Kurve der positiven y-Achse die konkave, im Intervall $\pi < x < 2\pi$ die konvexe Seite zu. Von $x = 2\pi$ bis $x = 4\pi$ ist der Verlauf gerade so wie von $x = 0$ bis $x = 2\pi$, das

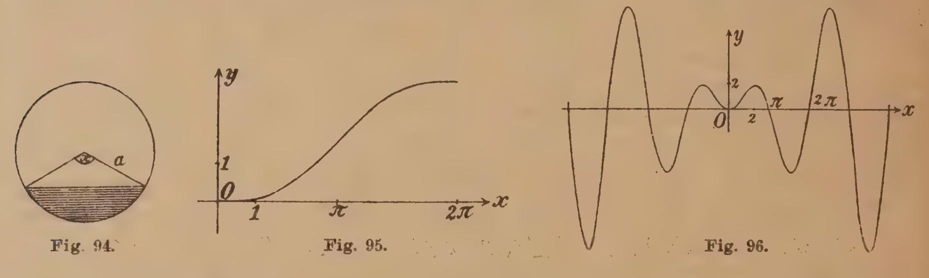


Fig. 94. Fig. 95. Fig. 96.

Kurvenstück ist nur verschoben und zwar in der Richtung der positiven x-Achse um 2π, in der Richtung der positiven y-Achse um π. Mit wachsendem x wächst y fortwährend, die Kurve hat daher keine Maxima oder Minima. Sie verläuft vollständig im ersten und dritten Quadranten und ist zum Koordinatenanfang symmetrisch.

14. $$y = x \sin x.$$

Die Kurve ist zur y-Achse symmetrisch und schneidet die x-Achse in $x = \pm k\pi$, wo $k = 0, 1, 2, \ldots$ ist. Die Abszissen der Maxima und Minima genügen der Gleichung $\operatorname{tg} x = -x$; da die Wurzeln dieser Gleichung die Abszissen der Schnittpunkte der Kurve $y = \operatorname{tg} x$ mit der Geraden $y = -x$ oder der Kurve $y = -\operatorname{tg} x$ mit der Geraden $y = x$ sind, befinden sich die Maxima und Minima an solchen Stellen, für die x zwischen $\pm(k + \frac{1}{2})\pi$ und $\pm(k + 1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ gelegen ist, und zwar erhält man die Maxima für $k = 0, 2, 4, \ldots$ die Minima für $k = 1, 3, 5, \ldots$ (Fig. 96). Außerdem liegen diese Stellen sämtlich auf der Kurve vierter Ordnung $y^2(1 + x^2) - x^4 = 0$. Die Abszissen der Wendepunkte bestimmen sich aus $x \operatorname{tg} x = 2$; diese

Punkte liegen auf der Kurve $x^2y^2 = 4(x^2 - y^2)$, einer „Kohlenspitzenkurve“, ebenso liegen sie auf der Kurve $y = 2\cos x$.

15. $$y = \frac{\sin x}{x}.$$

Die Kurve ist symmetrisch zur y-Achse und schneidet die x-Achse in $x = \pm k\pi$, wo $k = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Die Abszissen der Maxima und Minima von y sind die Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg} x = x$; die Punkte, in denen y ein Maximum wird, liegen oberhalb der x-Achse, die Punkte, denen ein Minimum von y zugehört, unterhalb der x-Achse, die größte Ordinate $y = 1$ gehört zu $x = 0$ (Fig. 97). Alle diese unendlich vielen Punkte, in denen y einen extremen Wert hat, liegen auf der Kurve vierter Ordnung $y^2 = \frac{1}{1 + x^2}$, dagegen die unendlich vielen Wendepunkte auf der Kurve sechster Ordnung $y^2 = \frac{4}{4 + x^4}$.

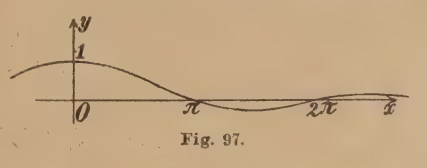


Fig. 97.

16. $$y = \sin\frac{1}{x}.$$

Die Kurve ist zum Koordinatenanfang symmetrisch. Ihre Schnittpunkte mit der x-Achse haben die Abszissen $x = \pm\frac{1}{k\pi}$, wo $k = 0, 1, 2, \ldots$ ist. Diese Punkte drängen sich daher in der Nähe des Koordinatenanfangs O mehr und mehr zusammen, während die von O entferntesten, aber noch im Endlichen gelegenen Schnittpunkte die Abszissen $x = \pm\frac{1}{\pi}$ $= \pm 0{,}318$ haben. Die Ordinaten y werden Maxima für $x = +\frac{2}{(4k+1)\pi}$

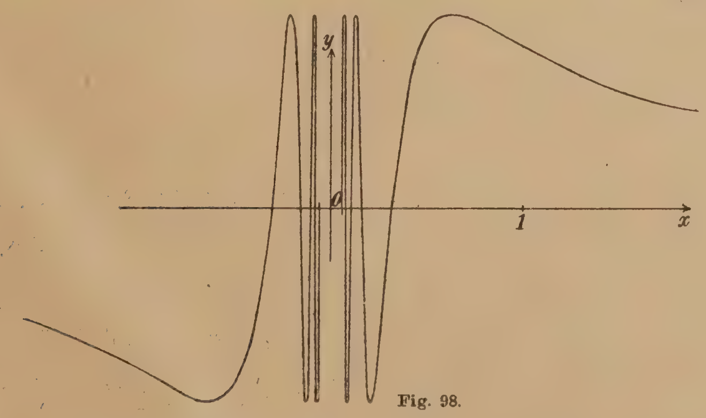


Fig. 98.

und $x = -\frac{2}{(4k+3)\pi}$, Minima für $x = -\frac{2}{(4k+1)\pi}$ und $x = +\frac{2}{(4k+3)\pi}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, und zwar liegen alle Maximalstellen auf der Geraden $y = 1$, alle Minimalstellen auf der Geraden $y = -1$. Diese extremen

Stellen sind also sämtlich in dem Intervall $-2:\pi \leqq x \leqq +2:\pi$ zusammengedrängt, in dem die Kurve zwischen $y=+1$ und $y=-1$ unendlich oft auf und ab schwankt. (Fig. 98.) Die Abszissen der Wendepunkte sind Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg}\frac{1}{x}=2x$; alle Wendepunkte liegen auf der Kurve vierter Ordnung $4x^2y^2=4x^2-y^2$.

17. $$y = x \sin\frac{1}{x}\cdot$$

Die Kurve ist zur y-Achse symmetrisch. Für die Schnittpunkte mit der x-Achse gilt das gleiche wie bei dem soeben betrachteten Beispiel. Sie sind aber jetzt die sämtlichen Wendepunkte der Kurve. Die Abszissen der Maxima und Minima von y sind die Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg}\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}$; diese Wurzeln liegen zwischen $\pm\frac{1}{k\pi}$ und $\frac{\pm 2}{(2k+1)\pi}$, wo entweder beidemale das obere oder beidemale das untere Vorzeichen zu stehen hat und $k=1, 2, 3, \ldots$ ist. Die Minimalstellen befinden sich in den zu ungeradem k gehörigen Intervallen, die Maxima in den Intervallen mit geradem k. Diese extremen Stellen sind also sämtlich zwischen $x=-\frac{2}{\pi}$ und $x=+\frac{2}{\pi}$ zusammengedrängt; die vom Koordinatenanfang O entferntesten Punkte mit extremen Werten der Ordinaten sind Minima und haben Abszissen, deren absolute Werte zwischen $1:\pi$ und $2:3\pi$ gelegen sind. (Fig. 99.) Alle diese Stellen liegen auf der „Kohlenspitzenkurve" $x^2-y^2=x^2y^2$, die zwischen den Geraden $y=+1$ und $y=-1$ verläuft. Die Gerade $y=1$ ist zugleich eine Asymptote dieser und der vorgelegten Kurve.

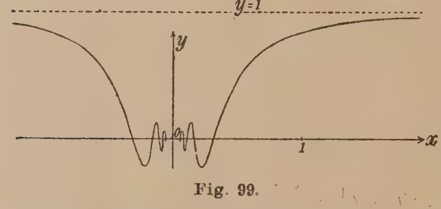


Fig. 99.

18. Man zeige, daß die Kurve

$$y = \frac{ax+b}{ce^{\frac{1}{x}}+d} = f(x)$$

für $x=0$ eine Unstetigkeit hat, indem y an dieser Stelle vom Wert $f(-0)=b:d$ zum Wert $f(+0)=0$ springt. Hierbei bedeutet $f(-0)$ den Wert, den die Funktion $y=f(x)$ für $x=0$ annimmt, wenn man sich der Abszisse $x=0$ von der Seite der negativen x-Achse her nähert; eine entsprechende Bedeutung hat $f(+0)$. Ferner soll die trigonometrische Tangente des Winkels α bestimmt werden, den die in dem einen oder anderen der beiden vorerwähnten Punkte gezogene geometrische Tangente mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt.

Ist ε eine sehr kleine positive Zahl, die man schließlich nach Null streben läßt, so nimmt y für $x = -\varepsilon$ den Wert

$$y = (b - a\varepsilon) : \left(c \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{\varepsilon}}} + d\right)$$

an, der sich für $\lim \varepsilon = 0$ auf $b:d$ reduziert. Die Annahme $x = +\varepsilon$ ergibt $y = (a\varepsilon + b) : \left(ce^{\frac{1}{\varepsilon}} + d\right)$ und liefert für $\lim \varepsilon = 0$ den Wert Null.

Man findet

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{ce^{\frac{1}{x}} + d} + \frac{(ax + b)\, ce^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(ce^{\frac{1}{x}} + d\right)^2}.$$

Zur Bestimmung von $\operatorname{tg} \alpha$ für $x = 0$, $y = b:d$ setze man $\frac{1}{x} = -t$ und lasse t nach $+\infty$ streben, dann wird $\operatorname{tg} \alpha = a:d$. Die Substitution $\frac{1}{x} = +t$ ergibt, wenn t nach $+\infty$ konvergiert, für $\operatorname{tg} \alpha$ im Punkt $x = y = 0$ den Wert Null.

19. Man zeige, daß die Kurve

$$y = \frac{ae^{\frac{1}{x}} + b}{ce^{\frac{1}{x}} + d}$$

für $x = 0$ unstetig ist, indem die Ordinate y von $f(-0) = b:d$ nach $f(+0) = a:c$ springt. Ferner soll gezeigt werden, daß die Tangente in diesen beiden Punkten zur x-Achse parallel ist.

Dieses Beispiel ist gerade so zu behandeln wie das vorhergehende. Übrigens geht die Kurve im Fall $ad - bc = 0$ in die Gerade $y = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$ über.

Sachregister.

Die Zahlen bezeichnen im allgemeinen die Seiten; nur wenn das Zeichen § vor einer Zahl steht, bezieht sie sich auf einen Paragraphen.

